

SÉRIE A,
N° 3948
N° D'ORDRE :
4799

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

ANDRÉE BASTIANI

1^{re} THÈSE. — Differentiabilité dans les espaces localement
convexes • Distributions

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 26 juin 1962 devant la Commission d'examen.

MM. Bouligand	<i>Président.</i>
Choquet	} <i>Examineurs.</i>
Germain	

SÉRIE A,
N° 3948
N° D'ORDRE :
4799

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

ANDRÉE BASTIANI

1^{re} THÈSE. — Differentiabilité dans les espaces localement
convexes • Distructures

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 26 juin 1962 devant la Commission d'examen.

MM. Bouligand	<i>Président.</i>
Choquet	} <i>Examineurs.</i>
Germain	





Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550215_0046

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen M. ZAMANSKY

G. JULIA	T Analyse supérieure et Algèbre supérieure	J.P. MATHIEU	T Physique (Optique)
DE BROGLIE	T Théories physiques	COUTEAUX	T Biologie animale (P.C.B.)
PRENANT	T Anatomie et Histologie comparées	MAY	T Zoologie (ORSAY)
GRASSÉ	T Evolution des êtres organisés	CHOQUET	T Théorie des fonctions et Topologie
PREVOST	T Chimie organique	FELDMANN	T Biologie Végétale marine
CHAUDRON	T Chimie appliquée	GUINIER	T Physique des Solides (ORSAY)
WYART	T Minéralogie et Cristallographie	JOST	T Physiologie comparée
TEISSIER	T Zoologie	FORTET	T Calcul des Probabilités et Physique mathématique
MANGENOT	T Biologie Vég. (ORSAY)	SCHWARTZ	T Calcul diff. et Intégral
AUGER	T Physique quantique et Relativité	CHOUARD	T Physiologie Végétale
MONNIER	T Physiologie Générale	MALAVARD	T Aviation (Techn. Aéronaut.)
PIVETEAU	T Paléontologie	BRELOT	T Calcul diff. et intégral
ROCARD	T Physique (E.N.S.)	NORMANT	T Synthèse organique générale
CARTAN	T Mathématiques (E.N.S.)	BENARD	T Chimie Minérale
LAFFITTE	T Chimie générale	BUVAT	T Botanique (E.N.S.)
FAVARD	T Géométrie supérieure	DUGUÉ	T Statistiques Mathématiques
COULOMB	T Physique du Globe	SOULAIRAC	T Psychophysiologie
Mlle COUSIN	T Biologie Animale (S.P.C.N.)	ULRICH	T Physiologie Végétale
CHRETIEN	T Chimie minérale	MARECHAL	T Optique théorique et Appl.
DRACH	T Zoologie	KIRRMANN	T Théories Chimiques
KASTLER	T Physique (E.N.S.)	CHADEFAUD	T Botanique
EPHRUSSI	T Génétique	Mlle LE BRETON	T Physiologie de la nutri.
RIVIÈRE	T Géologie S.P.C.N. et sédim.	SALEM	T Mathématiques générales
GAUTHERET	T Biologie Vég. (P.C.B.)	LELONG	T Applic. de l'analyse à la géométrie
LUCAS R.	T Recherches Physiques	DEVILLERS	T Anatomie et Histologie Comp.
THOMAS A.	T Biologie cellulaire	EHRESMANN	T Topologie Algébrique
ARNULF	T Optique appliquée	FRANÇON	T Physique (S.P.C.N.)
MORAND	T Physique Enseignement	GLANGEAUD	T Géographie physique et Géologie dynamique
SOLEILLET	T Physique (P.C.B.)	GODEMENT	T Mathématiques (M.P.C.)
FORTIER	T Mécanique exp. des Fluides	PISOT	T Techn. Mathém. de la Phys.
DANJON	T Astronomie	ROCH	T Géologie
PETIT	T Biologie maritime	SCHATZMAN	T Astrophysique
QUENEY	T Météorologie et dynamique atmosphérique	TERMIER	T Paléontologie stratig.
GALLIEN	T Embryologie	ZAMANSKY	T Mathématiques générales
EICHHORN	T Botanique	LENNUIER	T Physique (M.G.P.)
De CUGNAC	T Biologie Végétale (S.P.C.N.)	RIZET	T Génétique (ORSAY)
Mlle CAUCHOIS	T Chimie Physique	ROUTHIER	T Géologie appliquée
THELLIER	T Physique du Globe	Mme TONNELAT	T Physique Théorique
L'HERITIER	T Biologie Générale (ORSAY)	DIXMIER	T Mathématiques (M.P.C.)
GRIVET	T Radioélectricité (ORSAY)	SOUCHAY	T Chimie générale
PONCIN	T Mécanique Générale	AIGRAIN	T Electrotechnique générale
DUBREIL	T Arithmétique et théorie des Nombres	BRUSSET	T Chimie systématique
QUELET	T Chimie Organique	M. LEVY	T Physique théorique des hautes énergies (ORSAY)
CAGNIARD	T Géophysique appliquée	Mme CHAIX	T Chimie biologique
CHAMPETIER	T Chimie macromoléculaire	Mme HUREL-PY	T Biologie Végétale (P.C.B.)
CUVILLIER	T Micropaléontologie	PIAUX	T Chimie (M.P.C.)
JUNG	T Pétrographie	BRUN	T Mécan. théorique des Fluides
TRILLAT	T Microscopie et diffraction électronique	LEDERER	T Chimie biologique
WIEMANN	T Chimie organique et struc.	Mme DUBREIL	T Mathém. (Agrégation)
JACQUINOT	T Spectroscopie et phys. céleste (ORSAY)	Mme LELONG	T Mathématiques (E.N.S.)
VASSY	T Physique de l'atmosphère	BELLAIR	T Géologie (S.P.C.N.)
DESTOUCHES	T Théories Physiques	COTTE	T Physique électricité
AMIEL	T Chimie générale	DUBOIS J. E.	T Chimie organique
HOCART	T Minéralogie et Cristallog.		

LAMOTTE	T Zoologie (E.N.S.)	MATTLER	T Physique S.P.C.N.
MICHEL A.	T Chimie Minérale (ORSAY)	MICHEL L.	Physique théorique des Hautes Energies (ORSAY)
OLMER	T Energétique générale	BERGERARD	Zoologie (ORSAY)
ROUAULT	T Electricité (ORSAY)	BERTEIN	Electronique (ORSAY)
GAUTHIER	T Mécanique appliquée	BOUSSIÈRES	Chimie des Radioéléments (ORSAY)
BARCHEWITZ	T Chimie Physique	Mme COUTURE	Thermodynamique et Méc. Physique
BROSSEL	T Physique atomique	ELLENBERGER	Géologie appli. s. le terr.
BUSER	Physiologie comparée	FRANC	Biol. Animale (P.C.B.)
CAMUS	Physiologie Vég. (B.M.P.V.)	SCHNELL	Botanique tropicale (ORSAY)
CASTAING	T Physique (ORSAY)	STOLKOWSKI	Physiologie générale
CURIEN	T Minéralog. et Cristallog.	ACHER	Chimie Biol. (ORSAY)
MOYSE	T Physiologie Végé. (ORSAY)	BAUDOIN	Biologie animale (P.C.B.)
NOIROT	Evolution des Etres Org.	BEAUMONT	Biologie animale (S.P.C.N.)
PANNETIER	T Chimie générale (ORSAY)	BLAMONT	Géophysique Ionosphère
POSSOMPES	T Zoologie	BOURREAU	Botanique
PULLMANN	T Chimie théorique	CURIE D.	Physique (M.G.P.)
TEILLAC	T Physique Nucl. et Radioactivité	DURAND-DELGA	Géologie
TONNELAT	T Biologie Physico-Chim.	FREON	T Chimie organique (ORSAY)
VILLE	T Econométrie	HELLER	Physiologie végétale
WILLEMART	Chimie (P.C.B.)	TORTRAT	Calcul des Probabilités
DODE	T Chimie (ORSAY)	CAILLEUX	Géologie (S.P.C.N.)
FREYMANN	T Recherches Physiques	MAGNAN	T Physique (S.P.C.N.)
GUINOCHE	T Biol. Vég. S.P.C.N. (ORSAY)	DAUDEL	T Mécanique ondulatoire appl. à la Chim.
ROLLET	T Chimie (P.C.B.)	Mme FOURCROY	Théor. et à la Phys. Nucléaire
Mlle JOSIEN	T Chimie S.P.C.N.	Mme CHOQUET-	Biol. Végétale (S.P.C.N.)
CHEVALLEY	T Géométrie algébrique et théorie des groupes	BRUHAT	T Méc. Analytique et Méc. céleste
ARNOULT	T Electronique (ORSAY)	Mlle VEIL	Physiologie Générale
CHAPELLE	T Physique (ORSAY)	LWOFF	T Microbiologie
DELANGE	T Mathématiques (ORSAY)	SIESTRUNCK	T Mécan. Phys. et Expér.
DENY	T Mathématiques Génér. (ORSAY)	LACOMBE	T Métallurg. des métaux Nucl.
GERMAIN	T Mécan. théor. des fluides	BROCHARD	T Physique P.C.B. (ORSAY)
LUCAS G.	T Géologie	CABANNES	T Mécanique générale
ALLARD	T Chimie Physique	LESIEUR	T Mathématiques M.P.C. (ORSAY)
BERTHELOT	T Phys. Fondamentale des Hautes Energies (ORSAY)	MAZET	T Mécanique générale (ORSAY)
BRICART	T Météorologie et phys. de l'Atmosphère	CAIRE	Géographie phys. et Géol. Dynamique
Mme ALBE-		COMOLET	Mécanique des Fluides
FESSARD	Psychophysiologie	CORABŒUF	Physiologie Animale
FRIEDEL	Physique des Solides (ORSAY)	DELLOUE	Physique de l'exosphère
M. JULIA	Etudes des Moléculaires naturelles complexes	GORENFLOT	Botanique II (ORSAY)
LENDER	T Biologie Animale (S.P.C.N.) ORSAY	HOUILLOIN	Biologie Animale P.C.B.
MAGAT	Physico-chimie des radio-éléments	JULLIEN J.	Chimie P.C.B.
Mlle QUINTIN	T Electrochimie	MALGRANGE	Tech. Math. de la Phys.
MONOD	T Chimie du métabolisme	OLIVIER	Antropologie
BENOIT	T Physiol. Anim. (ORSAY)	NOZERAN	T Botanique II (ORSAY)
DE POSSEL	T Analyse numérique	BLANC-	
CHARLOT	T Chimie analytique	LAPIERRE	Physique E.N.S. (ORSAY)
HAISSINSKY	T Radiochimie	CHEVAUGEON	T Botanique (Orsay)
LEMÉE	T Physiol. Vég. B.M.P.V. (ORSAY)	KAHANE	T Mathématiques (Orsay)
GUERIN	T Chimie M.P.C. (ORSAY)	SAMUEL	T Mathématiques E.N.S. féminines
CHATELET M.	Chimie (P.C.B.)	KOURGANOFF	T Astronomie (Orsay)
JEAN	T Physique Nucléaire (ORSAY)	THIRY	T Mécanique céleste

Secrétaire Général R. POUILLAIN

DIFFERENTIABILITE DANS LES ESPACES LOCALEMENT
CONVEXES- DISTRUCTURES

par

Andrée BASTIANI
Paris

INTRODUCTION

La première partie de ce travail a pour objet la définition et l'étude de la notion d'application n fois différentiable d'un espace localement convexe dans un autre. Bien que diverses définitions aient été proposées auparavant, celles-ci ne conviennent pas pour les problèmes abordés ici, car elles mènent à une notion de différentiabilité ne possédant pas les propriétés nécessaires de continuité et d'invariance par composition. Le troisième chapitre, qui sera développé dans un travail ultérieur, indique comment la théorie des variétés différentiables de dimension finie et de leurs prolongements se généralise au cas de dimension infinie.

La deuxième partie est un essai d'axiomatisation de l'Analyse fonctionnelle à l'aide des notions de "catégorie inductive vectorielle topologique" et de "distructure"; le principal problème étudié est celui de la "dicomplétion" d'une catégorie inductive vectorielle topologique. L'idée est de faire intervenir à la fois le point de vue local (complétion "verticale" ou topologique) et le point de vue global (complétion "horizontale" ou algébrique); ainsi des théories aussi différentes que celles des opérateurs de Mikusinski (complétion algébrique seule) et de la complétion au sens d'Aronszajn (complétion topologique seule) rentrent dans le même cadre.

Les résultats de la première partie sont utilisés dans les exemples et applications, en particulier pour définir des dis-

structures sections d'espaces fibrés différentiables de dimension finie ou infinie qui généralisent les distributions de Schwartz et les courants de de Rham et en donnent une définition de nature essentiellement locale.

Afin de limiter la longueur du texte, il a été nécessaire de supprimer les démonstrations et d'esquisser très brièvement le genre de problèmes susceptibles d'être traités par la méthode indiquée; l'article complet paraîtra ultérieurement; il est rédigé en partant d'hypothèses un peu plus générales et contiendra aussi les applications à la théorie des équations aux dérivées partielles et des systèmes différentiels.

L'origine de mes recherches n'a pas été le simple désir d'axiomatiser certaines théories de l'Analyse. D'une part, il me semblait naturel d'étendre la théorie des distributions de manière à généraliser les applications différentiables d'un espace vectoriel topologique dans un autre; d'autre part, les difficultés que j'ai rencontrées dans l'étude des parties finies d'Hadamard (pour résoudre des problèmes aux limites de type mixte comme celui de Burmister en Elasticité) m'ont amenée progressivement à la notion de catégorie de distructures.

Je tiens à remercier MM. Bouligand et Choquet qui m'ont encouragée, avant même que je sois licenciée, à m'orienter vers la Recherche; plus tard, M. Choquet, Directeur de mes recherches, m'a toujours permis de travailler dans les conditions qui m'étaient les plus favorables et je le prie de croire à toute ma reconnaissance. Enfin je remercie M. Germain d'avoir accepté de me donner le sujet de la seconde thèse.

PREMIERE PARTIE

DIFFERENTIABILITE DANS LES ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

Chapitre I

APPLICATIONS DIFFERENTIABLES

1- GENERALITES.

Les espaces localement convexes considérés ici sont des espaces vectoriels topologiques sur le corps $\mathbb{R}$ des réels qui satisfont, sauf indication contraire, à l'axiome de Hausdorff. Soit E un espace localement convexe; les voisinages de 0 utilisés seront toujours supposés convexes et symétriques. A un tel voisinage U correspond sur E une semi-norme p continue, jauge (voir [5a]) de U telle que l'intérieur de U soit l'ensemble des points x de E pour lesquels $p(x) < 1$. La topologie de E est encore définie par la donnée de l'ensemble des semi-normes correspondant à un système fondamental de voisinages de 0 . Quand nous parlerons de semi-norme ou de norme sur un espace localement convexe, il sera sous-entendu que c'est une semi-norme ou une norme continue.

Rappelons [3a] qu'un ensemble est pseudo-borné si sa trace sur tout sous-espace de dimension finie est bornée. Pour qu'un ensemble convexe ou un ensemble fermé et équilibré soit pseudo-borné, il faut et il suffit qu'il ne contienne pas de demi-droite. Pour que la topologie de E admette une base de voisinages

de O pseudo-bornés, il faut et il suffit qu'elle puisse être définie par un ensemble de normes; nous dirons alors que E est pseudo-normé.

A la topologie de E , nous associerons canoniquement une topologie, appelée hypotopologie, de la manière suivante: Soit A un ensemble équilibré et absorbant contenant O et qui contient avec tout point différent de O un voisinage de ce point pour la topologie de E . Ces ensembles A forment une base de filtre. Soit F_0 le filtre qu'ils engendrent. Un ensemble B de F_0 est un ensemble contenant O et tel que toute demi-droite D issue de O soit intérieure à un cône pointé de sommet O sur lequel la trace de B soit un voisinage de O pour la topologie induite par E sur ce cône. Le filtre des hypovoisinages d'un point x de E sera le filtre F_x déduit de F_0 par la translation qui amène O en x . On définit ainsi sur E une topologie plus fine que la topologie de E pour laquelle les applications:

$$x \longrightarrow x+y \quad \text{et} \quad (k,x) \longrightarrow kx,$$

où $x \in E$, $y \in E$ et $k \in \mathbb{R}$, sont continues. L'hypotopologie ainsi définie n'est généralement pas compatible avec la structure de groupe additif de E .

Sur tout compact de E , la topologie et l'hypotopologie associée induisent la même topologie.

Lemme 1: Soit M un ensemble fermé équilibré de l'espace localement convexe E . Soit U un hypovoisinage de O dans E . Pour toute demi-droite D issue de O sur laquelle la trace de M est un segment I , il existe un cône C de sommet O à l'intérieur duquel ap-

partient D et tel que $M \cap C$ soit absorbé par $U \cap C$.

Démonstration: Soit x une extrémité de I et soit $k > 0$ tel que $x \in k/2 U$. Soit x' un point de $D \cap (M \cap kU)$ et V un voisinage ouvert de x' contenu dans $2kU$; l'ensemble $W = V \cap M$ est ouvert et le cône C de sommet O engendré par W contient D dans son intérieur. Pour tout $m \in M \cap C$, l'intersection de M avec la demi-droite D' issue de O passant par m contient un point y . Puisque M est équilibré, $M \cap D'$ est contenu dans le segment $[O, y]$, donc dans $2kU$. Par suite $M \cap C$ est absorbé par $U \cap C$.

Si un hypovoisinage A est convexe, sa jauge $p(A)$ (voir [3a], p. 103, ex. 5) sera appelée hyponorme sur E . L'application $p(A)$ est continuée pour l'hypotopologie.

Exemples: 1-1. Si E est un espace de dimension finie, l'hypotopologie associée à la topologie de E est identique à cette topologie.

1-2. Si E est muni de la topologie fine (voir [3]), un hypovoisinage de E est l'analogue, dans le cas où E est un espace vectoriel sur R , d'un ensemble localement borné au sens de [12] (où E est un espace vectoriel sur le corps des complexes).

1-3. Soit E un espace de Hilbert complet, admettant une base orthonormale dénombrable $(e_1, \dots, e_n, \dots)$; soit g l'application de la sphère unité de E dans E telle que:

$$g(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (x_i / 2^i) e_i, \quad \text{où } \|x\| = 1 \quad \text{et} \quad x_i = (x | e_i).$$

L'ensemble A formé des points y de E tels que:

$$\|y\| \leq \|g(ky)\|, \quad \text{où } \|ky\| = 1 \quad \text{et} \quad k \in R,$$

est un hypovoisinage convexe de E ne contenant aucune boule.

L'hyponorme correspondante est l'application p définie par:

$$p(x) = \|x\| / \|g(x')\|, \text{ où } x' = kx \text{ et } \|x'\| = 1.$$

Soit $\vec{E}$ l'espace affine associé à E ; si x est un point de E , les vecteurs liés (voir [2]) d'origine x engendrent l'espace vectoriel E_x déduit de E par la translation qui amène O en x ; nous appellerons E_x l'espace tangent à E en x . Quand aucune confusion ne risque d'en résulter, nous identifierons le vecteur lié $(\overrightarrow{x, x+h})$ au couple (x, h) et le vecteur libre de $\vec{E}$ correspondant au point (ou vecteur) h de E .

Soit S_E l'espace sphérique associé à E ; c'est l'espace quotient topologique de $E - \{0\}$ par la relation d'équivalence ρ :

$$x \sim y \text{ si et seulement si } y = kx, \text{ où } k \in \mathbb{R} \text{ et } k > 0.$$

La classe de x modulo ρ sera appelée direction de x .

Si A est un ensemble de E , rappelons (voir [3]) que le cône d'appui de A en un point s de A est l'ensemble obtenu par saturation de A relativement à la relation d'équivalence ρ_s qui définit l'espace sphérique associé à E_s .

Soient E et F deux espaces localement convexes et $E \times F$ l'espace localement convexe produit. Nous identifierons $E \times \{0\}$ avec E . Soit A un ensemble contenant O dans E et B un ensemble équilibré de F . Nous désignerons par $c(A, B)$ le cône dans $E \times F$ formé des demi-droites issues de $(0, 0)$ et dont les points (x, y) sont tels que $y \in B$ lorsque $x \in A$. Si A est équilibré, soit A^* le bord de A , c'est-à-dire l'ensemble des extrémités des segments traces de A sur les demi-droites issues de O . Soit A^{∞} l'ensemble

des demi-droites contenues dans A . Le cône $c(A,B)$ est le cône d'appui en $(0,0)$ de l'ensemble $(A \times B) \cup (A^{\infty} \times \{0\})$. Si B est un voisinage de 0 dans F , alors l'ensemble des directions des points de $c(A,B)$ est un voisinage dans $S_{E \times F}$ du sous-espace formé par les directions de E .

Si f est une application d'une partie de E dans F , nous noterons f/A sa restriction à un ensemble A de E et $C_z(f)$ le cône d'appui du graphe de f en un point $z=(x,f(x))$ de ce graphe. Si $z=(0,0)$, nous écrirons seulement $C(f)$. Ce cône est l'ensemble des points (x,y') tels qu'il existe $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$, pour lequel on ait $ty' = f(tx)$.

L'espace vectoriel des applications d'une partie de E dans F , continues en x , sera noté $C(x,E,F)$. Si U est un ouvert de E , nous désignerons par $C(U,F)$ l'espace des applications définies sur un ensemble de E contenant U , continues sur U , à valeurs dans F . Soit $L(E,F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F . Si $T \in L(E,F)$, nous écrirons:

$$T(x) = \langle x, T \rangle, \quad \text{où } x \in E.$$

Quand nous considérerons sur $C(U,F)$ (resp. $L(E,F)$) la topologie de la S -convergence, où S est un ensemble de parties de E , nous noterons cet espace topologique $C_S(U,F)$ (resp. $L_S(E,F)$). Si S est l'ensemble de tous les compacts de E , nous écrirons $C_c(U,F)$ (resp. $L_c(E,F)$). Si S est l'ensemble de tous les bornés, nous écrirons $L_b(E,F)$.

Si $(E_i)_{i \leq n}$ est une famille finie d'espaces localement

convexes, nous noterons $l(\bigcap_{i \leq n} E_i, F)$ l'espace vectoriel des applications multilinéaires continues de $\bigcap_{i \leq n} E_i$ dans F et si T est un élément de cet espace nous écrirons :

$$T((x_i)_{i \leq n}) = \langle (x_i)_{i \leq n}, T \rangle = \langle (x_1, \dots, x_n), T \rangle, \text{ où } x_i \in E_i.$$

La topologie de la $(S_i)_{i \leq n}$ - convergence sur cet espace est la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de la forme $\bigcap_{i \leq n} S_i$, où $S_i \in S_i$, S_i désignant un ensemble de parties de E_i pour tout $i \leq n$. L'espace topologique ainsi défini sera noté $l_{S_i}(\bigcap_{i \leq n} E_i, F)$. Si S_i' est, pour tout $i \leq n$, l'ensemble de tous les compacts de E_i (resp. des bornés de E_i), nous écrirons $l_c(\bigcap_{i \leq n} E_i, F)$ (resp. $l_b(\bigcap_{i \leq n} E_i, F)$).

2- APPLICATIONS LIPSCHITZIENNES ET TANGENTES A 0:

Dans ce paragraphe, nous allons étudier le comportement d'une application au voisinage d'un point. Par translation, nous nous ramènerons à la situation suivante: E et F sont des espaces localement convexes, A est un voisinage de 0 dans E et f une application de A dans F telle que $f(0)=0$.

Pour généraliser au cas où E et F ne sont pas normés les notions classiques d'applications lipschitziennes et 0-lipschitziennes, il semble naturel de poser:

Définition 2-1: Soient p et q des semi-normes sur E et F resp. et k un nombre positif. On dit que f est lipschitzienne en 0 de rapport k relativement à p et q s'il existe un voisinage U'

de 0 dans E tel que, pour tout $x \in U'$, on ait:

$$q(f(x)) \leq kp(x).$$

On dit que f est 0-lipschitzienne relativement à p et q si, pour tout $k > 0$, f est lipschitzienne de rapport k relativement à p et q. On dit que f est lipschitzienne (resp. 0-lipschitzienne) en 0 si, pour toute semi-norme q sur F, il existe une semi-norme p sur E telle que f soit lipschitzienne (resp. 0-lipschitzienne) relativement à p et q.

Si p n'est pas une norme, soit D une droite telle que $p(D)=0$. Alors, si f est lipschitzienne relativement à p et q, on a: $q(f(D \cap A))=0$.

Soit U un voisinage de 0 dans E, de jauge p, et V un voisinage de 0 dans F, de jauge q. Pour que f soit lipschitzienne de rapport k relativement à p et q, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage U' de 0 dans E tel que l'on ait:

$$C(f/U') \subset c(U, kV) \quad (\text{notations du § 1}).$$

Pour que f soit lipschitzienne en 0, il faut et il suffit que, pour tout voisinage V de 0 dans F, il existe des voisinages U et U' de 0 dans E tels que l'on ait:

$$C(f/U') \subset c(U, V).$$

Pour que f soit 0-lipschitzienne en 0, il faut et il suffit que, pour tout voisinage V de 0 dans F, il existe un voisinage U de 0 dans E vérifiant la condition: Pour tout $k > 0$, il existe un voisinage U' de 0 dans E tel que l'on ait:

$$C(f/U') \subset c(U, kV).$$

Proposition 2-1: Pour qu'une f soit lipschitzienne en 0, il faut et il suffit que l'application m définie sur l'ensemble des couples (t,v) tels que $t \geq 0$, $v \in E$ et $tv \in A$ par:

$$m(t,v)=f(tv)/t \quad \text{si } t \neq 0 \quad \text{et} \quad m(0,v)=0$$

soit continue en (0,0).

Si dans la définition 2-1, on suppose de plus que U' est un voisinage de 0 pour la topologie définie sur E par la semi-norme p, on dira que f est régulièrement lipschitzienne en 0 de rapport k relativement à p et q. On définit de même les applications régulièrement 0-lipschitziennes. Une application lipschitzienne en 0 est régulièrement lipschitzienne en 0. Mais si la topologie de E ne peut pas être définie par une seule semi-norme, il existe des applications 0-lipschitziennes en 0 qui ne sont pas régulièrement 0-lipschitziennes en 0.

Proposition 2-2: Pour que f soit 0-lipschitzienne (resp. régulièrement 0-lipschitzienne) en 0, il faut et il suffit que, pour toute semi-norme q sur F, il existe une semi-norme p sur E telle que l'on ait:

$$q(f(h))=p(h)a(h),$$

où a est une fonction de A dans F, continue (resp. continue pour la topologie définie par p sur E) en 0.

En abrégé, nous écrirons: $a(h) \rightarrow 0$ si $h \rightarrow 0$ (resp. si $p(h) \rightarrow 0$).

Exemples: 2-1. Toute fonction linéaire et continue est régulièrement lipschitzienne en 0.

2-2. Si f est continue en 0 et telle que $f(ax) = a^n f(x)$, où n est positif et $a \in \mathbb{R}$, alors f est 0 -lipschitzienne en 0 .

L'ensemble des applications (régulièrement) lipschitziennes en 0 forme un sous-espace vectoriel de $C(0, E, F)$. La restriction d'une application (régulièrement) lipschitzienne à un sous-espace vectoriel de E est une application (régulièrement) lipschitzienne en 0 sur ce sous-espace.

Proposition 2-3: La composée de deux applications (régulièrement) lipschitziennes en 0 est (régulièrement) lipschitzienne en 0 . La composée à droite ou à gauche d'une application (régulièrement) lipschitzienne en 0 et d'une application (régulièrement) 0 -lipschitzienne en 0 est une application (régulièrement) 0 -lipschitzienne en 0 .

Démonstration: Soient f lipschitzienne en 0 et g une application lipschitzienne en 0 d'un ouvert de F dans un espace localement convexe G . Pour toute semi-norme r sur G , il existe une semi-norme q sur F et un nombre $k > 0$ tels que g soit lipschitzienne de rapport k relativement à q et r . À q correspond une semi-norme p sur E telle que f soit lipschitzienne de rapport k' relativement à p et q . Alors $g \circ f$ est lipschitzienne de rapport kk' relativement à p et r . La fin de la proposition est alors évidente.

Proposition 2-4: Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces localement convexes. Si pour tout $i \in I$ l'application f_i de E dans F_i est 0 -lipschitzienne en 0 , alors l'application $f = (f_i)_{i \in I}$ de E dans

$F = \bigcap_{i \in I} F_i$ est 0-lipschitzienne en 0.

Démonstration: Un système fondamental de semi-normes sur F est obtenu en prenant les semi-normes: $q_{I'} = \sup_{i \in I'} (q_i \circ \text{pr}_i)$, où I' est un sous-ensemble fini de I , où pr_i est la projection canonique de F sur F_i et q_i décrit un système fondamental de semi-normes sur F_i . A la semi-norme q_i correspondent la semi-norme p_i sur F_i et la fonction a_i (proposition 2-2) telles que:

$$q_i(f_i(h)) = p_i(h) a_i(h), \quad \text{où } a_i(h) \rightarrow 0 \text{ si } h \rightarrow 0.$$

On a alors:

$$q_{I'}(f(h)) = \left(\sup_{i \in I'} p_i(h) \right) a(h), \quad \text{où } a(h) \rightarrow 0 \text{ si } h \rightarrow 0.$$

donc f est 0-lipschitzienne en 0.

En pratique, les notions d'applications (régulièrement) 0-lipschitziennes sont trop restrictives dans beaucoup de questions qui interviennent en Analyse, lorsque les espaces ne sont pas normés. Il est donc utile d'introduire une notion plus maniable, celle d'application tangente à 0 en 0, dont nous nous servirons principalement dans la suite. Il est commode de poser d'abord:

Définition 2-2: On dit que f est 0-hypolipschitzienne en 0 si, pour toute semi-norme q sur F , il existe une semi-norme p sur E telle que l'on ait:

$$q(f(h)) = p(h) b(h),$$

où b est une fonction continue en 0 lorsque E est muni de l'hypotopologie.

Cette définition signifie encore que, pour tout voisinage V de O dans F , il existe un voisinage U de O dans E vérifiant la condition suivante: Pour tout nombre $k > 0$, il existe un hypovoisinage $\tilde{U}$ de O dans E tel que l'on ait:

$$c(f/\tilde{U}) \subset c(U, kV).$$

Proposition 2-5: Soit B un ensemble équilibré, absorbant, fermé et pseudo-borné. Si f est 0-hypolipschitzienne en O , alors pour tout voisinage V de O dans F , il existe un hypovoisinage $\tilde{U}$ de O dans E tel que les conditions $v \in B$ et $tv \in \tilde{U}$, où $t \in R$, entraînent $f(tv) \in tV$.

Cette proposition résulte du lemme 1-1.

Exemples: 2-3. Si E est de dimension finie, il y a identité entre applications 0-lipschitziennes et applications 0-hypolipschitziennes en O .

2-4. Toute application 0-lipschitzienne est 0-hypolipschitzienne en O ; mais une application 0-hypolipschitzienne en O peut même ne pas être continue en O .

Proposition 2-6: Si f est 0-hypolipschitzienne et continue en O et si g est une application lipschitzienne en O de F dans un espace localement convexe G , alors $g \circ f$ est 0-hypolipschitzienne en O .

Démonstration: Soit r une semi-norme sur G . Il existe une semi-norme q sur F et un nombre $k > 0$ tels que, pour tout $h' \in F$ pour lequel $q(h') < 1$, on ait: $r(g(h')) \leq kq(h')$. A q correspond une semi-norme p sur E telle que, pour tout $a > 0$, il existe un hypo-

voisinage $\tilde{U}$ de 0 dans E tel que les relations $h \in \tilde{U}$ et $\bar{h}$ tel que $p(\bar{h}) < 1$ entraînent:

$$q(f(h)) \leq ap(h) \quad \text{et} \quad q(f(\bar{h})) < 1.$$

A r correspond la semi-norme $p' = kp$ vérifiant les conditions: pour tout $h > 0$, il existe un hypovoisinage $\tilde{U}' = \tilde{U} \cap \bar{p}^1([0,1])$ tel que, si $h \in \tilde{U}'$, on ait: $r(gof(h)) \leq ap'(h)$. Donc gof est 0-hypolipschitzienne en 0.

Définition 2-3: Soit D une demi-droite issue de 0 dans E. On dit que f est tangente à 0 dans la direction de D si, pour toute semi-norme q sur F, il existe une semi-norme p sur E vérifiant la condition: Pour tout $k > 0$, il existe un cône C de sommet 0 dont l'intérieur contient D et un voisinage U de 0 dans E tels que, pour tout $h \in C \cap U$, on ait: $q(f(h)) \leq kp(h)$. On dit que f est tangente à 0 en 0 si f est lipschitzienne en 0 et tangente à 0 dans toutes les directions.

On ne change pas la notion d'application tangente à 0 en 0 si on remplace dans cette définition "voisinage U" par "hypovoisinage U".

Si f est tangente à 0 en 0, sa restriction à tout sous-espace vectoriel de E est tangente à 0 en 0. L'ensemble des applications tangentes à 0 en 0 de A dans F est un sous-espace vectoriel de $C(0, A, F)$.

Remarque: La considération du contingent [2] en 0 des graphes de deux applications ne permet pas de définir une bonne notion de tangence. En effet, soit f l'application de R dans un espace

localement convexe F admettant une base algébrique dénombrable $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et muni de la topologie fine, définie par:

$$f(x)=0 \quad \text{si} \quad x \neq 1/2^n \quad \text{et} \quad f(1/2^n)=e_n/n.$$

Le contingent en 0 du graphe de f est réduit au sous-espace $R \times \{0\}$ de $R \times F$, alors que pour tout voisinage de 0 dans R le cône d'appui de la restriction de f à ce voisinage contient une infinité de droites ne convergeant pas vers une droite du contingent.

Théorème 2-1: Pour que f soit tangente à 0 en 0, il faut et il suffit que l'application m , définie sur l'ensemble A' des couples (t,v) tels que $t \geq 0$, $v \in E$ et $tv \in A$, par:

$$m(t,v) = f(tv)/t \quad \text{si} \quad t \neq 0 \quad \text{et} \quad m(0,v) = 0$$

soit continue en $(0,v)$ pour tout $v \in E$.

Démonstration: La continuité de m en $(0,0)$ signifie que f est lipschitzienne en 0 d'après la proposition 2-1. Soit q une semi-norme sur F . Supposons m continue en $(0,v)$ pour tout $v \in E$. Soit D une demi-droite issue de 0 dans E . Choisissons un point v sur D et une semi-norme p sur E tels que $p(v)=1$. Pour tout $k > 0$, soit U' le voisinage ouvert de 0 dans E et a le nombre tels que les conditions $t < a$, $v' \in v+U'$ et $tv' \in A$ entraînent $q(f(tv')) < tk$. Le cône C engendré par l'ensemble B des points v' tels que $v' \in v+U'$ et $p(v') < 1$ contient D dans son intérieur et, pour tout $h \in C$ tel que $p(h) < a$, il existe $v' \in B$ tel que $h=tv'$. Alors on a: $t < p(h) < a$ et $q(f(h)) < kt < kp(h)$, donc f est tangente à 0 dans la direction de D . Inversement si f est tangente à 0 en 0, soit $v \in E$ et p la semi-norme sur E associée par définition

à q et à la direction D de v ; on peut supposer $p(v)=a/2 > 0$. Soient U le voisinage ouvert de O et C le cône tels que l'on ait $q(f(h)) < p(h)/a$ pour tout $h \in U \cap C$. Soit $a' > 0$ tel que $v \in a'U$. L'ensemble W des points $v' \in a'U \cap C$ tels que $p(v') < a$ est un voisinage de v ; les conditions $t < 1/a'$, $v' \in W$ et $tv' \in A \cap C$ entraînent $tv' \in U$ et $p(tv') < ta$, d'où $q(f(tv)) < t$. Donc m est continue en $(0, v)$.

Théorème 2-2: Pour que f soit tangente à O en O , il faut et il suffit que, pour tout voisinage V de O dans F et pour tout $v \in E$, il existe deux voisinages $U(v)$ et $U'(v)$ de O dans E tels que les conditions: $v' \in v+U'(v)$ et $tv' \in U(v)$ entraînent:

$$f(tv') \in tV.$$

Démonstration: Soit V un voisinage de O dans F et $v \in E$. Si f est tangente à O en O , il existe d'après le théorème 2-1 un voisinage U' de O dans E et un nombre $a > 0$ tels que les conditions $t < a$ et $v' \in v+U'$ entraînent $f(tv) \in tV$. On peut supposer qu'il existe un voisinage U de O dans E ne rencontrant pas $v+U'$. Alors les conditions $v' \in v+U'$ et $tv' \in aU \cap A$ entraînent $t < a$, donc $f(tv) \in tV$. Inversement, soient $U(v)$ et $U'(v)$ des voisinages ouverts tels que $f(tv') \in tV$ si $v' \in v+U'(v)$ et $tv' \in U(v)$. L'enveloppe convexe M de O avec $v+U'(v)$ est un voisinage de v . Soit $a > 0$ tel que $v \in aU(v)$. Les conditions $t < 1/a$, $w \in M \cap aU(v)$ et $tw \in A$ entraînent $tw \in U(v)$ et $tw = t'v'$, où $t' < t$ et $v' \in v+U'(v)$, donc $f(tw) \in tV$. Ceci prouve que m est continue en $(0, v)$ et, d'après le théorème 2-1, que f est tangente à O en O .

Proposition 2-7: Pour que f soit tangente à 0 en 0 , il suffit que f soit lipschitzienne en 0 et qu'il existe un hypovoisinage B de 0 dans E vérifiant la condition: Pour tout voisinage V de 0 dans F , il existe un hypovoisinage $\tilde{U}$ de 0 dans E tel que l'on ait: $C(f/\tilde{U}) \subset c(B,V)$.

Démonstration: Soit V un voisinage de 0 dans F et soit $v \in E$. Soit d un nombre > 0 tel que $v \in dB$, et $\tilde{U}$ l'hypovoisinage associé à V/d par l'hypothèse. Il existe un cône C tel que $C \cap dB$ soit un voisinage $U'+v$ de v et que $\tilde{U} \cap C$ soit la trace sur C d'un voisinage U de 0 dans E . Alors les conditions $v' \in v+U'$ et $tv' \in U \cap A$ entraînent $f(tv') \in tV$ et f est tangente à 0 en 0 d'après le théorème 2-2.

Corollaire: Si f est lipschitzienne et 0 -hypolipschitzienne en 0 , alors f est tangente à 0 en 0 .

Proposition 2-8: Si f est tangente à 0 en 0 , pour tout voisinage V de 0 dans F et pour tout ensemble B fermé équilibré, absorbant et pseudo-borné dans E , il existe un hypovoisinage $\tilde{U}$ de 0 dans E tel que l'on ait: $C(f/\tilde{U}) \subset c(B,V)$.

Démonstration: A une demi-droite D dans E et à une semi-norme q sur F , jauge de V , est associée par définition une semi-norme p sur E . D'après le lemme 1-1, il existe $d > 0$ et un cône C' tels que $p(B \cap C') < d$. Au nombre $1/d$ correspond un voisinage U et un cône C tels que $q(f(h)) \leq p(h)/d$ pour tout $h \in U \cap C$. La trace $B(D)$ de U sur $C \cap C' \cap A$ est un voisinage de 0 dans $C \cap C'$ et la réunion $\tilde{U}$ des ensembles $B(D)$ lorsque D balaye E est un hypovoisinage de 0 dans E . Pour tout $h \in \tilde{U}$, il existe $v \in B$ tel

que $h=tv$; par suite $p(h)=tp(v) < td$ et $q(f(h)) < t$. Donc on a:

$$C(f/\tilde{U}) \subset c(B,V).$$

Corollaire : Si E est pseudo-normé, f est tangente à 0 en 0 si et seulement si f est lipschitzienne et 0-hypolipschitzienne en 0.

Théorème 2-3: Si f est tangente à 0 en 0 et si g est une application lipschitzienne en 0, à valeurs dans un espace localement convexe G , alors $g \circ f$ est tangente à 0 en 0.

Démonstration: Soit r une semi-norme sur G et q la semi-norme sur F telle que g soit lipschitzienne de rapport k relativement à q et r . Soit q' la semi-norme sur F telle que l'on ait:

$$r(g(h')) \leq kq(h) \quad \text{si} \quad q'(h') < 1.$$

Soit $a > 0$; à la semi-norme $q'' = \sup(q, q')$ correspond une semi-norme p sur E vérifiant la condition: A a/k est associé un cône C et un voisinage U tels que $q''(f(h)) \leq (a/k)p(h)$ pour tout $h \in U \cap C$. Alors, les conditions: $h \in U \cap C$ et $p(h) < k/a$ entraînent $r(g(f(h))) \leq ap(h)$. Donc $g \circ f$ est tangente à 0 dans la direction de D et lipschitzienne en 0.

Théorème 2-4: La proposition 2-4 est vraie en remplaçant 0-lipschitzienne par tangente à 0.

Proposition 2-9: Si E est de dimension finie, toute application tangente à 0 dans toutes les directions est 0-lipschitzienne en 0.

Démonstration: Soit q une semi-norme sur F ; si D est une demi-droite dans E et k un nombre > 0 , il existe un cône $C(D)$ et $d > 0$ tels que, si $h \in C(D)$ et $\|h\| < d$, on ait: $q(f(h)) \leq k\|h\|$. Il exis-

te un nombre fini de droites D_i , où $i < n$, telles que les cônes $C(D_i)$ correspondants recouvrent E . Par suite, si $\|h\| < \inf_{i < n} d_i$ on a: $q(f(h)) \leq k \|h\|$.

Remarque: Si E est de dimension infinie, la proposition n'est évidemment plus vraie. Par exemple, avec les notations de l'exemple 1-3, l'application: $x \longrightarrow \|x\| p(x)$ est tangente à 0 dans toutes les directions mais n'est pas continue en 0. L'application: $x \longrightarrow \|x\| \inf (p(x), a)$, où a est une constante positive donnée, est tangente à 0 en 0 sans être 0-lipschitzienne en 0.

Définition 2-4: Soient f et g deux applications définies sur un voisinage A de 0 dans E . On dira que f et g sont tangentes en 0 si $f-g$ est tangente à 0 en 0. On dira que f et g sont uniformément (resp. régulièrement) tangentes en 0 si $f-g$ est 0-lipschitzienne (resp. régulièrement 0-lipschitzienne) en 0.

3- APPLICATIONS DIFFERENTIABLES EN UN POINT:

Soient E et F deux espaces localement convexes, A une partie de E d'intérieur non vide et x un point de l'intérieur de A . Nous désignerons par f une application de A dans F .

Définition 3-1: On dit que f est dérivable en x dans la direction de v , où $v \in E$ et $v \neq 0$, si la restriction de f à la demi-droite issue de x et passant par $x+tv$ est différentiable en x . La dérivée à droite en 0 de l'application: $t \longrightarrow f(x+tv)$, où

$t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ et $x+tv \in A$, sera notée $\partial_v f(x)$ et appelée dérivée de f en x par rapport à v . Si f est dérivable en x dans toutes les directions et si l'application $Df(x)$ définie par:

$0 \rightarrow 0$ et $v \rightarrow \partial_v f(x)$ si $v \neq 0$, $v \in E$, est linéaire et continue, on dit que f est dérivable en x .

Si f est dérivable dans la direction de v , on a:

$$\partial_{v'} f(x) = k \partial_v f(x), \text{ où } v' = kv \text{ et } k \in \mathbb{R}.$$

Définition 3-2: On dit que f est différentiable (resp. uniformément différentiable, resp. régulièrement différentiable) en x s'il existe une application linéaire continue $Df(x)$ de E dans F qui soit tangente (resp. uniformément tangente, resp. régulièrement tangente) en 0 à l'application:

$$v \mapsto f(x+v) - f(x).$$

Alors, la restriction de $Df(x)$ à toute droite D de E est la différentielle de la restriction de f à D . Ainsi f est dérivable en x et $Df(x)$ est unique. On appelle $Df(x)$ la différentielle de f en x .

Exemples: 3-1- Toute application linéaire et continue est différentiable. Toute application régulièrement différentiable est uniformément différentiable. Toute application uniformément différentiable est différentiable.

3-2. Si E et F sont normés, il y a identité entre applications régulièrement différentiables, uniformément différentiables et différentiables au sens de Fréchet. Par contre une application peut être différentiable sans être différentiable au sens de

Fréchet. La notion de différentiabilité introduite ici est plus forte que celle de différentiabilité au sens de Gâteaux [12].

3-3. Toute application tangente à 0 (resp. 0-lipschitzienne) en 0 est différentiable (resp. régulièrement différentiable) en 0 et sa différentielle est l'application identiquement nulle.

Remarques: 3-1. Les notions de différentiabilité régulière et uniforme s'introduisent d'une manière analytiquement très naturelle et c'est pourquoi elles sont définies ici. Mais dans le cas où les espaces ne sont pas normés, c'est la notion de différentiabilité en un point qui est la mieux adaptée à l'étude des problèmes que nous considérerons. Nous utiliserons en particulier le fait qu'une conditions simple de continuité des dérivées partielles (voir § 4) entraîne la différentiabilité en un point (et non la différentiabilité uniforme).

3-2. Balanzat [2] appelle application différentiable en un point x une application de E dans F dont la restriction à tout arc de E , passant par x et défini par une fonction dérivable, est différentiable, la différentielle étant une application linéaire et continue. Cette définition est trop faible pour être employée dans ce travail. En particulier elle entraîne qu'il existe toujours une application différentiable de E dans F qui n'est pas continue, sauf si E est bornologique.

3-3. Dans le cas des variétés de dimension infinie que nous définirons plus loin, nous verrons que la différentielle en un point est une application de l'espace tangent à la variété en ce point dans l'espace des vecteurs libres associé à l'espace

dans lequel l'application prend ses valeurs. C'est pour simplifier que nous avons ici identifié la différentielle à une application de E dans F .

Les notions de différentiabilité en un point dépendent des topologies de E et F . Il y a d'autant plus d'applications différentiables de E dans F que la topologie de E est plus fine et celle de F moins fine. Par suite si E' et F' désignent les duaux topologiques de E et F munis des topologies données, toute application de E dans F différentiable pour les topologies initiales est différentiable si E est muni de la topologie de Mackey $\tau(E, E')$ et F de la topologie faible $\sigma(F', F)$ (voir [5a])

Les résultats du paragraphe 2 donnent différentes caractérisations des applications différentiables en x . La proposition suivante rappelle les principales.

Proposition 3-1: Pour que f soit différentiable (resp. uniformément, resp. régulièrement différentiable) en x , il faut et il suffit qu'il existe une application linéaire et continue $Df(x)$ de E dans F et que la condition C (resp. C' , resp. C'') soit vérifiée.

C - Pour tout voisinage V de 0 dans F et pour tout $v \in E$, il existe deux voisinages $U(v)$ et $U'(v)$ de 0 dans E tels que les conditions: $v' \in v + U'(v)$ et $tv' \in U(v)$ entraînent:

$$f(x + tv) - f(x) - \langle tv, Df(x) \rangle \in tv.$$

C' (resp. C'')- Pour toute semi-norme q sur F , il existe une semi-

norme p sur E telle que l'on ait:

$$q(f(x+h) - f(x) - \langle h, Df(x) \rangle) = p(h) a(h),$$

où a est une fonction continue en 0 pour la topologie de E (resp. pour la topologie définie sur E par la semi-norme p).

Remarquons que, pour que f soit régulièrement différentiable en x , il faut et il suffit que, pour toute semi-norme q sur F , il existe une semi-norme p sur E telle que f soit différentiable au sens de Fréchet en x si E et F sont munis resp. des topologies définies par p et q .

Théorème 3-1: L'ensemble des applications de A dans F qui sont différentiables en x est un sous-espace vectoriel $D(x, A, F)$ de $C(x, A, F)$. Il en est de même des ensembles d'applications uniformément ou régulièrement différentiables en x .

La différentielle en x de l'application $kf + k'f'$, où $k \in \mathbb{R}$ et $k' \in \mathbb{R}$, est l'application: $kDf(x) + k'Df(x)$.

Les notions de différentiabilité se conservent par restriction à un sous-espace vectoriel.

Théorème 3-2: La composée de deux applications différentiables (resp. uniformément, resp. régulièrement différentiables) en un point est différentiable (resp. uniformément, resp. régulièrement différentiable) en un point, sa différentielle étant la composée des différentielles.

Démonstration: Soit f une application différentiable en 0 et g une application différentiable en $f(0)$, à valeurs dans l'espace

localement convexe G . Par translation, on se ramène au cas où $f = Df(0) + a$ et $g = Dg(0) + b$, a et b étant des applications tangentes à 0 en 0 . On a :

$$g \circ f = Dg(0) \circ Df(0) + Dg(0) \circ a + b \circ f.$$

D'après le théorème 2-3, $Dg(0) \circ a$ est tangente à 0 en 0 . Montrons que $b \circ f$ est aussi tangente à 0 en 0 . En effet, soient $v \in E$ et W un voisinage de 0 dans G . À W et à $\langle v, Df(0) \rangle$ correspondent deux voisinages V et V' de 0 dans F tels que les conditions: $w' \in \langle v, Df(0) \rangle + V'$ et $tw' \in V$ entraînent: $b(tw') \in tw$. À V' et à v correspondent deux voisinages U et U' de 0 dans E tels que les conditions: $v' \in v + U'$ et $tv' \in U$ entraînent $a(tv') \in tv'/2$ et $\langle v' - v, Df(0) \rangle \in V'/2$. Puisque f est continue en 0 , à V est associé un voisinage U'' de 0 dans E tel que $f(tv') \in V$ pour tout $tv' \in U''$. Les conditions: $v' \in v + U'$ et $tv' \in U \cap U''$ entraînent: $f(tv') = tw' \in V$ et $w' \in V' + \langle v, Df(0) \rangle$, donc $b \circ f(tv') \in tw$. Il en résulte que $g \circ f$ est différentiable en 0 , sa différentielle étant l'application continue $Dg(0) \circ Df(0)$. Le reste du théorème se déduit de la proposition 2-3.

Théorème 3-3: Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces localement convexes. Soit f_i une application différentiable en x de A dans F_i , pour tout $i \in I$. Alors l'application $(f_i)_{i \in I}$ de A dans $F = \prod_{i \in I} F_i$ est différentiable en x , sa différentielle étant l'application $(Df_i(x))_{i \in I}$.

Résulte de la proposition 2-4 et du théorème 2-4.

Corollaire: Si T est une application multilinéaire de $F = \prod_{i \in I} F_i$

dans un espace localement convexe G, continue, alors l'application $To(f_i)_{i \leq n}$ est différentiable en x, sa différentielle étant:

$\sum_{j \leq n} To(g_j)$, où g_j est l'application:

$$x \longrightarrow (f_1(x), \dots, f_{j-1}(x), Df_j(x), f_{j+1}(x), \dots, f_n(x)).$$

Exemples: 3-5. Si f est une application différentiable (resp. uniformément, resp. régulièrement différentiable) en x et si f' est une application différentiable (resp. uniformément, resp. régulièrement différentiable) en x de E dans R , alors l'application $f'f: x \longrightarrow f'(x)f(x)$ de E dans F est différentiable (resp. uniformément, resp. régulièrement différentiable) en x et sa différentielle est donnée par:

$$D(f'f(x)) = f'(x)Df(x) + Df'(x)f(x).$$

3-6. Soit B une algèbre topologique commutative (voir [5d], p. 9) et $(f_i)_{i \leq n}$ une famille d'applications f_i de E dans B différentiables en x . Alors l'application:

$$\bigtimes_{i \leq n} (f_i): x \longrightarrow f_1(x).f_2(x). \dots .f_n(x)$$

de E dans B est différentiable en x et on a:

$$D(\bigtimes_{i \leq n} f_i) = \sum_{i \leq n} f_1(x). \dots .f_{i-1}(x).Df_i(x).f_{i+1}(x). \dots .f_n(x).$$

Théorème 3-4: Soit B une algèbre topologique commutative dans laquelle l'ensemble B' des éléments inversibles est ouvert. Si l'application $I: x \longrightarrow x^{-1}$ est continue sur B' , alors elle est uniformément différentiable en tout point x de B' et on a:

$$\langle h, DI(x) \rangle = -x^{-1}.h.x^{-1}, \quad \text{pour tout } h \in B.$$

Démonstration: Tous les points considérés sont dans B' . On a:

$$(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}.h.x^{-1} = -x^{-1}.h.((x+h)^{-1} - x^{-1}).$$

Soit q une semi-norme sur B et soit $k > 0$. L'application:

$(x, y) \longrightarrow x.y$ étant continue, il existe une semi-norme p sur B et $k' > 0$ tels que l'on ait:

$$q(x.y.z) < p(x)p(y)p(z) k'.$$

L'application I étant continue, à p et à $k'' = k/(k'p(x^{-1}))$ correspond une semi-norme p' sur B telle que, pour tout h pour lequel $p'(h) < 1$, on ait:

$$p((x+h)^{-1} - x^{-1}) < k''.$$

Il en résulte que, si $p'(h) < 1$, on a:

$$q((x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}.h.x^{-1}) < p(h)p(x^{-1})k''k' < p(h)k,$$

ce qui prouve le théorème.

Corollaire: Si f est une application de A dans B , différentiable (resp. uniformément différentiable) en x , alors l'application: $x \longrightarrow (f(x))^{-1}$ est différentiable (resp. uniformément différentiable) en $x \in A$ (B') et sa différentielle est l'application: $-(f(x))^{-1}.Df(x).(f(x))^{-1}$.

4- APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES SUR UN OUVERT

Soient E et F deux espaces localement convexes et f une application d'un ouvert A de E dans F . Nous désignerons dans toute la suite par S un ensemble total de parties bornées de E .

Dans le cas de dimension finie, l'existence de dérivées partielles continues sur A entraîne la différentiabilité de f en tout point de A . Nous allons montrer comment ce théorème se généralise dans le cas de dimension infinie. Toutefois, dans

le cas de dimension finie, ce théorème implique la continuité de l'application: $x \longrightarrow Df(x)$, où $Df(x)$ est la différentielle de f en $x \in A$, lorsque $L(E, F)$ est muni de la topologie de la S-convergence. Ce résultat n'est plus exact dans le cas général, ce qui nous conduira à une autre notion de différentiabilité sur un ouvert, surtout intéressante dans le cas d'espaces normés où la b-différentiabilité se conserve par composition.

Définition 4-1: L'application f est différentiable sur A si f est dérivable pour tout $x \in A$ et si l'application:

$$D.f : (x, v) \longrightarrow \langle v, Df(x) \rangle$$

de $A \times E$ dans F est continue en tout point de $A \times E$.

Remarques: 4-1: Si l'ensemble des points sur lequel f est défini n'était pas ouvert, il suffirait de prendre la restriction de f à l'intérieur de cet ensemble.

4-2. Dans le cas des variétés, l'application $D.f$ est définie sur l'espace tangent à la variété muni de sa topologie d'espace fibré (voir chapitre III). Cet espace est isomorphe à E^2 ici et c'est pour simplifier que nous avons identifié le vecteur lié $(\overrightarrow{x, x+v})$ au couple (x, v) .

Définition 4-2: On dit que f est S-différentiable sur A si f est différentiable en tout point x de A et si l'application:

$$Df : x \longrightarrow Df(x)$$

de A dans $L(E, F)$ est continue pour la topologie de la S-convergence sur $L(E, F)$. L'application Df est appelée différentielle de f sur A .

On définit de manière analogue une application uniformément (resp. régulièrement) différentiable sur A en supposant de plus f uniformément (resp. régulièrement) différentiable en tout point de A . Dans les théorèmes suivants, on pourrait échanger ces diverses notions dans les mêmes cas qu'au paragraphe précédent. Pour ne pas alourdir la rédaction, nous ne le répéterons pas.

Exemples: 4-1. Si F est la droite réelle, la définition d'application différentiable sur un ouvert de E est équivalente à celle citée par Rosenbloom [15].

4-2. Eells [8] dit que f est de classe C^1 sur A si f est dérivable en tout point x de A et si Df est continue pour la topologie de la convergence bornée sur $L(E, F)$. Cette définition n'entraîne pas en général la continuité de f sur A qui est essentielle dans ce que nous ferons. Toute application b -différentiable est de classe C^1 , mais la réciproque est fausse si E n'est pas métrisable (voir corollaire 1 de la proposition 4-2).

Si S' est un ensemble total de parties de E contenu dans S , toute application S -différentiable sur A est évidemment S' -différentiable sur A . Une application s -différentiable sur A , où s désigne l'ensemble des parties finies de E , est simplement une application différentiable en tout point de A .

Si S est l'ensemble des compacts (resp. des bornés) de E , nous désignerons S par c (resp. par b) dans la suite.

Théorème 4-1: Une application différentiable sur A est différentiable en tout point de A.

Démonstration: De la différentiabilité de f sur A résulte que, pour tout $x \in A$ et tout $v \in E$, l'application: $t \longrightarrow f(x+tv)$ est continuellement dérivable pour tout réel t tel que $x+tv \in A$, sa dérivée en t' étant $\langle v, Df(x+t'v) \rangle$. Par suite des propriétés des applications vectorielles différentiables, on a:

$$f(x+tv) - f(x) = \int_0^t \langle v, Df(x+t'v) \rangle dt',$$

où l'intégrale est une intégrale vectorielle faible sur F . On a également:

$$f(x+tv) - f(x) - \langle tv, Df(x) \rangle = \int_0^t \langle v, Df(x+t'v) - Df(x) \rangle dt'$$

où $x \in A$, $v \in E$ et $x+tv \in A$. Fixons un point x_0 de A et un point v_0 de E . De la continuité de l'application $D.f$ en (x_0, v_0) , on déduit qu'il existe, pour tout voisinage V de 0 dans F , deux voisinages U et U' de 0 dans E tels que les conditions:

$x' \in A \cap (x_0 + U)$, $v' \in v_0 + U'$ entraînent:

$$D.f(x', v') - D.f(x_0, v_0) \in V/2.$$

Par suite, si $x \in A \cap (x_0 + U)$, $x+t'v \in A \cap (x_0 + U)$ et $v \in v_0 + U'$, on a: $\langle v, Df(x+t'v) - Df(x) \rangle \in V$. En supposant V fermé, on en déduit (corollaire p. 81, [5c]) que, sous les mêmes conditions, on a:

$$f(x+tv) - f(x) - \langle tv, Df(x) \rangle \in tv.$$

D'après le théorème 2-2, ceci entraîne la différentiabilité de f en $x_0 \in A$.

Corollaire 1: Soit f une application différentiable sur A et K un compact de E . Soit m_x l'application définie sur l'ensemble

A' des couples (t, v) , où $t \geq 0$, $v \in E$ et $x + tv \in A$, par:

$$\begin{cases} m_x(t, v) = \frac{f(x + tv) - f(x) - \langle tv, Df(x) \rangle}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ m_x(0, v) = 0 \end{cases}$$

Alors l'ensemble des applications m_x , où x décrit K , est équi-
continu sur A .

Démonstration: D'après la démonstration du théorème, pour tout voisinage V de 0 dans F et pour tout couple (x_0, v_0) , où $x_0 \in A$ et $v_0 \in E$, il existe deux voisinages ouverts $U(x_0, v_0)$ et $U'(x_0, v_0)$ de 0 dans E tels que les conditions:

$$x \in x_0 + U(x_0, v_0), \quad x + tv \in x_0 + U(x_0, v_0), \quad v \in v_0 + U'(x_0, v_0)$$

entraînent:

$$f(x + tv) - f(x) - \langle tv, Df(x) \rangle \in tv.$$

On peut recouvrir K par un nombre fini de voisinages de la forme: $x_i + U(x_i, v_i)/3$, où $x_i \in K$ et $i < n$. Soient $U(v_0)$ et $U'(v_0)$ les voisinages intersections des voisinages $U(x_i, v_0)/3$ et $U'(x_i, v_0)$ resp., où $i < n$. Pour tout $x \in K \cap A$, il existe x_i tel que $x \in x_i + U(x_i, v_0)/3$ et les conditions: $x + tv \in x + U(v_0)$ et $v \in v_0 + U'(v_0)$ entraînent:

$$f(x + tv) - f(x) - \langle tv, Df(x) \rangle \in tv.$$

Une démonstration analogue à la fin de celle du théorème 2-2 prouve alors le corollaire.

Corollaire 2: Si E est pseudo-normé, si f est une application
différentiable sur A et si K est un compact de E , pour toute
semi-norme q sur F et pour toute norme p sur E , on a:

$$q(f(x+h) - f(x) - \langle h, Df(x) \rangle) = p(h) a_x(h),$$

où l'ensemble des applications a_x , où x décrit K , est équicontinu en 0 lorsque E est muni de l'hypotopologie.

Démonstration: Reprenons les notations du corollaire 1. Soit q une semi-norme sur F , $k > 0$ et V le voisinage de 0 dans F de jauge q/k . Soit p une norme sur E . Sur toute demi-droite D dans E , soit v_0 le point tel que $p(v_0)=1$. Le cône $C(D)$ engendré par l'ensemble des points w tels que $w \in v_0 + U^1(v_0)$ et $p(w) < 1$ contient D dans son intérieur. La réunion $\tilde{U}$ des ensembles $U(v_0) \cap C(D)$ lorsque D balaye E est un hypovoisinage de 0 dans E tel que l'on ait:

$$q(f(x+h) - f(x) - \langle h, Df(x) \rangle) \leq p(h)k,$$

pour tout $h \in \tilde{U}$ et tout $x \in K$, ce qui prouve le corollaire 2.

Théorème 4-2: Si E est normé et si f est une application dérivable en tout point x de A telle que l'application Df soit une application continue de A dans $L_b(E, F)$, alors f est régulièrement différentiable en tout point de A .

Démonstration: Pour tout voisinage V de 0 dans F , il existe $k > 0$ tel que l'on ait: $\langle v, Df(x') - Df(x) \rangle \in V$ pour tout v pour lequel $\|v\| < 1$ et pour tout x' tel que $\|x' - x\| < k$. Une démonstration analogue à celle du théorème 4-1 prouve que l'on a:

$$f(x+v) - f(x) - \langle v, Df(x) \rangle \in \|v\| V$$

pour tout v tel que $\|v\| < k$. Donc f est régulièrement différentiable en x .

Proposition 4-1: Si f est différentiable sur A , alors f est S -différentiable pour tout ensemble S de parties compactes de E .

En effet, la continuité de l'application $D.f$ entraîne que l'application Df est continue pour la topologie de la S -convergence (et de la convergence compacte) sur $L(E,F)$.

Corollaire 1: Si E est métrisable, f est différentiable sur A si et seulement si f est dérivable en tout point de A et si l'application Df de A dans $L_c(E,F)$ est continue sur A . Il y a alors identité entre applications différentiables et c -différentiables sur A .

Démonstration: Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites dans A et E resp. tendant vers $x \in A$ et $v \in E$ resp. La continuité de l'application Df de A dans $L_c(E,F)$ entraîne que pour tout voisinage V de 0 dans F il existe un nombre m tel que, pour tout $n > m$, on ait:

$$D.f(x_n, v_n) - D.f(x, v_n) \in V/2 \quad \text{et} \quad D.f(x, v_n) - D.f(x, v) \in V/2.$$

Donc $D.f(x_n, v_n)$ tend vers $D.f(x, v)$ lorsque n tend vers l'infini et, puisque E est métrisable, l'application $D.f$ est continue sur $A \times E$. Par suite f est différentiable et c -différentiable sur A , puisque différentiable en tout point de A d'après le théorème 4-1.

Corollaire 2: Si E est métrisable et tonnelé, f est différentiable sur A si et seulement si f est dérivable sur A , l'application Df étant continue pour la topologie de la convergence simple sur $L(E,F)$.

En effet l'application $D.f$ étant séparément continue sur $A \times E$, elle est continue d'après le théorème 3, p. 28 [5b].

Corollaire 3: Soient E'_c le dual topologique de E muni de la

topologie de la convergence dans les parties compactes de E et ξ l'ensemble des parties équicontinues de E . Si E est un espace quasi-complet tel que $(E'_0)'_0 = E$, alors il y a identité entre applications c -différentiables et ξ -différentiables sur A .

Démonstration: L'enveloppe équilibrée d'un compact est compacte et $L_0(E, F)$ est canoniquement isomorphe à $E'_0 \otimes F$ (corollaire p. 36 [16]). De plus $E'_0 \otimes F$ est canoniquement isomorphe à $L_\xi(E, F)$ (corollaire 2 p. 34 [16]). Par suite toute application c -différentiable sur A est ξ -différentiable sur A et réciproquement.

Corollaire 4: Si E est métrisable complet, il y a identité entre applications différentiables et ξ -différentiables sur A .

Résulte des corollaires 1 et 3 puisque E a alors la topologie de Mackey.

Corollaire 5: Si E est un espace quasi-complet tel que $(E'_0)'_0 = E$ et si E'_0 est tonnelé, il y a identité entre applications c -différentiables et b -différentiables sur A . En particulier, il en est ainsi si E est un espace de Banach réflexif.

En effet, il y a identité entre parties équicontinues et parties bornées de E et le corollaire se déduit du corollaire 3.

Remarques: 4-3. Si E est un espace de Banach et si E'_0 est tonnelé, il y a identité entre parties bornées et faiblement compactes de E , donc E est réflexif.

4-4. Dans le cas général, une application peut être S -différentiable sur A sans être différentiable sur A . Une application différentiable sur A peut ne pas être S -différentiable sur A si S contient des parties de E non compactes.

Théorème 4-3: L'ensemble $D^1(A, F)$ des applications différentiables sur A , à valeurs sur F , est un sous-espace vectoriel de $C(A, F)$ (contenant $L(E, F)$). Il en est de même de l'ensemble $D^1S(A, F)$ des applications S -différentiables sur A , à valeurs dans F .

Ce théorème résulte des définitions et du théorème 3-1.

Théorème 4-4: La composée d'une application différentiable (resp. S -différentiable) sur A et d'une application différentiable sur un ouvert de F est une application différentiable (resp. S -différentiable) sur un ouvert.

Démonstration: Supposons f différentiable (resp. S -différentiable) sur A ; soit g une application différentiable sur un ouvert A' de F , à valeurs dans un espace localement convexe G . D'après le théorème 3-2, l'application $g \circ f$ est différentiable en tout point de $A'' = A \cap \bar{f}^{-1}(A')$. Montrons que si f est différentiable sur A , alors l'application:

$$(x, v) \longrightarrow \langle v, Dg(f(x)) \circ Df(x) \rangle$$

est continue sur $A'' \times E$. En effet, pour tout voisinage W de 0 dans G , il existe deux voisinages V et V' de 0 dans F tels que les conditions: $f(x) - f(x') \in V$ et $\langle v, Df(x) \rangle - \langle v', Df(x') \rangle \in V$ entraînent:

$$\langle \langle v, Df(x) \rangle, Dg(f(x)) \rangle - \langle \langle v', Df(x') \rangle, Dg(f(x')) \rangle \in W.$$

On peut associer à V le voisinage U de 0 dans E tel que l'on ait $f(x) - f(x') \in V$ pour tout $x - x' \in U$. À V' correspondent deux voisinages U' et U'' de 0 dans E tels que, si on a: $x - x' \in U'$ et $v - v' \in U''$, alors:

$$\langle v, Df(x) \rangle - \langle v', Df(x') \rangle \in V'$$

Par suite, pour tout $x' \in x + U \cap U'$ et tout $v' \in v + U''$, on aura:

$$\langle v, Dg(f(x)) \circ Df(x) \rangle - \langle v', Dg(f(x')) \circ Df(x') \rangle \in W$$

et l'application $D \cdot \text{gof}$ est continue sur $A'' \times E$. Montrons de même que si f est S -différentiable sur A et g différentiable sur A' , alors l'application $Dg(f) \circ Df$ est continue sur A , à valeurs dans $L_S(E, F)$. Si W est un voisinage de 0 dans G , soient V et V' les voisinages de 0 dans F que nous lui avons associés ci-dessus. A V correspond encore le voisinage U de 0 dans E . De la continuité de Df résulte qu'à V' et à un ensemble $s \in S$ correspond un voisinage U_1 de 0 dans E tel que, pour tout $v \in s$ et tout $x' \in x + U_1$, on ait:

$$\langle v, Df(x) \rangle - \langle v, Df(x') \rangle \in V'.$$

Par suite, pour tout $v \in s$ et tout $x' \in x + U \cap U''$, on aura:

$$\langle v, Dg(f(x)) \circ Df(x) \rangle - \langle v, Dg(f(x')) \circ Df(x') \rangle \in W,$$

ce qui prouve que gof est S -différentiable sur A'' .

Théorème 4-5: Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces localement convexes. Pour tout $i \in I$, soit f_i une application de A dans F_i différentiable (resp. S -différentiable) sur A . Alors l'application $(f_i)_{i \in I}$ de E dans $F = \prod_{i \in I} F_i$ est différentiable (resp. S -différentiable) sur A .

Réciproquement si f est différentiable sur A (resp. S -différentiable sur A), alors, en vertu du théorème 4-4, pour tout $i \in I$, l'application $\text{pr}_i \circ f$ est différentiable (resp. S -différentiable) sur A , en désignant par pr_i la projection canonique de

F sur F_i .

Ce théorème admet des corollaires analogues à ceux du théorème 3-3, en remplaçant partout différentiable en x par différentiable (resp. S -différentiable) sur A . Après la même modification, le théorème 3-4 est aussi valable.

Dans tous les résultats précédents on pourrait remplacer différentiable par régulièrement (resp. uniformément) différentiable sur A dans les mêmes cas qu'au paragraphe 3.

Théorème 4-6: Soient E' et E'' deux espaces localement convexes tels que E soit la somme topologique $E' \oplus E''$. Soit $f' + f''$ la décomposition canonique correspondante de f . Si f' et f'' sont différentiables sur A' et A'' resp., alors f est différentiable sur $A' \oplus A''$ et, pour tout $x \in A' \oplus A''$, on a:

$$\langle v' + v'', Df(x) \rangle = \langle v', Df'(x) \rangle + \langle v'', Df''(x) \rangle.$$

Démonstration: Montrons que f admet $\langle v' + v'', Df(x) \rangle$ pour dérivée dans la direction de $v = v' + v''$. On a:

$$\begin{aligned} f(x + tv) - f(x) - \langle v, Df(x) \rangle &= f'(x + tv) - f'(x + tv'') - \langle tv', Df'(x + tv'') \rangle \\ &\quad + f''(x + tv'') - f''(x) - \langle tv'', Df''(x) \rangle \\ &\quad + \langle tv', Df'(x + tv'') - Df'(x) \rangle \end{aligned}$$

puisque: $f''(x + tv) = f''(x + tv'')$ et $f'(x + tv'') = f'(x)$. De la dérivabilité de f' et de f'' et de la continuité de l'application Df' de A' dans $L_S(E, F)$ résulte que, pour tout voisinage V de 0 dans F , il existe $a > 0$ tel que, pour tout $t < a$, on ait:

$$f(x + tv) - f(x) - \langle tv, Df(x) \rangle \in tV.$$

De la continuité des applications $D.f'$ et $D.f''$, on déduit celle de l'application: $(x, v' + v'') \longrightarrow \langle v' + v'', Df(x) \rangle$ sur $A' \oplus A'' \times E$,

et par suite la différentiabilité de f sur $A' \oplus A''$.

Théorème 4-7: Soit B un connexe de E d'intérieur non vide. Soit f une application définie sur une partie A de E contenant B , à valeurs dans F , continue sur l'adhérence de B et différentiable (resp. S -différentiable) sur l'intérieur de B . Pour que f soit constante sur l'adhérence de B , il faut et il suffit que $Df(x)$ soit l'application constante sur 0 , pour tout x appartenant à l'intérieur de B .

Démonstration: La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Soit B' une composante connexe de l'intérieur de B . Puisque E est localement convexe, donc localement connexe, B' est ouvert. Soit $b \in B'$; l'ensemble B'' des points $x \in B'$ tels que $f(b) = f(x)$ est fermé par suite de la continuité de f sur B . Montrons que B'' est ouvert. L'application f étant différentiable sur l'intérieur de B , sa restriction à tout segment contenu dans B est une application vectorielle continuellement dérivable et dont la dérivée est nulle en tout point, donc cette restriction est constante et f est constante sur tout un voisinage U' de b , contenu dans l'intérieur de B . Il en résulte que B'' est ouvert, donc identique à B' et f est constante sur toute composante connexe de l'intérieur de B . Par conséquent f est constante sur $\bar{B}$ puisque la connexité de B entraîne que deux composantes connexes ont un point commun.

Corollaire: Si f est dérivable en tout point d'un ouvert $B \subset A$ de E , si f est continue sur l'adhérence de B et si $Df(x) = 0$ pour tout $x \in B$, alors f est constante sur toute composante connexe de B .

Chapitre IIESPACES D'APPLICATIONS n FOIS DIFFERENTIABLES

5- DIFFERENTIELLES D'ORDRE SUPERIEUR.

Soient E et F deux espaces localement convexes, f une application d'une partie A de E dans F et x un point de l'intérieur de A.

Définition 5-1: On dit que le jet d'ordre n de f est nul en x, et on écrit $j_x^n f = 0$, si les conditions suivantes sont vérifiées:
Pour toute semi-norme q sur F:

1) et pour toute demi-droite D de E, il existe une semi-norme p sur E vérifiant les conditions: Pour tout $a > 0$, il existe un cône C de sommet O dont l'intérieur contient D et un voisinage U de O dans E tels que l'on ait:

$$q(f(x+h)) < (p(h))^n \quad \text{pour tout } h \in U \cap C.$$

2) Il existe une semi-norme p' sur E et un voisinage U' de O dans E tels que, pour tout $h \in U'$, on ait:

$$q(f(x+h)) < (p'(h))^n.$$

La relation $j_x^n f = 0$ entraîne : $f(x) = 0$ et $j_x^p f = 0$ pour tout $p < n$. On a $j_x^1 f = 0$ si et seulement si f est tangente à 0 en x.

Une démonstration analogue à celle des théorèmes 2-1 et 2-2 prouve:

Théorème 5-1: On a $j_x^n f = 0$ si et seulement si l'application m définie sur l'ensemble A des couples (t, v) , où $t \geq 0$, $v \in E$ et $x + tv \in A$, par:

$m(t, v) = f(x + tv) / t^n$ si $t \neq 0$ et $m(0, v) = 0$
est continue en $(0, v)$ pour tout $v \in E$.

Théorème 5-2: Pour que l'on ait $j_x^n f = 0$, il faut et il suffit que, pour tout voisinage V de 0 dans F et pour tout $v \in E$, il existe deux voisinages U et U' de 0 dans E tels que les conditions: $v' \in v + U$ et $tv' \in U'$ entraînent: $f(x + tv') \in t^n V$.

Corollaire: Si $j_x^n f = 0$, pour tout compact K de E et pour tout voisinage V de 0 dans F , il existe une semi-norme p sur E telle que les conditions: $v \in K$ et $p(tv) < 1$ entraînent:

$$f(x + tv) \in t^n V.$$

Démonstration: Soient $U(v)$ et $U'(v)$ les voisinages de 0 dans E correspondants au voisinage V de 0 dans F et à $v \in K$. On peut recouvrir K par un nombre fini de voisinages $U(v_i)$ correspondants aux points v_i , où $i < r$. Pour tout $v \in K$, il existe i tel que $v \in v_i + U(v_i)$, donc $f(x + tv) \in t^n V$ si $p(tv) < 1$, où p est la jauge de l'intersection des $U'(v_i)$, où $i < r$.

Théorème 5-3: Si $j_x^n f = 0$ et si g est une application lipschitzienne d'un ouvert de F dans un espace localement convexe G , alors on a: $j_x^n(g \circ f) = 0$.

Démonstration analogue à celle de la proposition 2-6.

Définition 5-2: On dit que f est n fois différentiable en x si f est $(n-1)$ fois différentiable en x et s'il existe une ap-

plication $D^n f(x)$ multilinéaire et séparément continue de E^n dans F telle que le jet d'ordre n en x de l'application:

$$v \longrightarrow \Delta^n f(x, v) = f(x+v) - f(x) - \langle v, Df(x) \rangle - \dots - \frac{1}{n!} \langle (v, \dots, v), D^n f(x) \rangle$$

soit nul. L'application $D^n f(x)$ est appelée n -ième différentielle de f en x .

D'après le corollaire du théorème 5-2, si f est n fois différentiable en x sa restriction à tout sous-espace de dimension finie est n fois différentiable en x au sens habituel. En particulier, pour tout n -uple $(v_1, \dots, v_n)$, l'application:

$$g: (k_1, \dots, k_n) \longrightarrow f(x + k_1 v_1 + \dots + k_n v_n)$$

est différentiable n fois en $(0, \dots, 0)$ et on a:

$$\langle (v_1, \dots, v_n), D^n f(x) \rangle = \frac{\partial^{ng}(0, \dots, 0)}{\partial k_1 \dots \partial k_n}.$$

Il en résulte que $\langle (v_1, \dots, v_n), D^n f(x) \rangle$ est indépendant de l'ordre du n -uple. De plus l'application $D^n f(x)$ est unique.

Les applications n fois différentiables en x ont des propriétés analogues à celles des applications différentiables en x . Nous ne les expliciterons pas ici car les énoncés sont plus compliqués et ne serviront pas dans la suite.

Remarque: 5-1. On pourrait encore définir les notions d'application n fois régulièrement différentiable en x ou n fois uniformément différentiable en x .

Définition 5-3: On dit que f admet $\bigcirc_{v_1, \dots, v_n}^n f(x)$ pour dérivée en x relativement au n -uple $(v_1, \dots, v_n)$, où $v_i \in E$ et $v_i \neq 0$

pour tout $i \leq n$, si la restriction de f à la variété engendrée par les droites $(x, x+v_i)$ admet une différentielle $D^n f(x)$ d'ordre n telle que l'on ait: $\langle (v_1, \dots, v_n), D^n f(x) \rangle = \partial_{v_1 \dots v_n}^n f(x)$.

Si f est n fois différentiable en x , alors f admet une dérivée en x par rapport à tout n -uple et est n fois dérivable en x , selon la définition suivante:

Définition 5-4: On dit que f est n fois dérivable (resp. continuellement dérivable) en x si f est $n-1$ fois dérivable (resp. continuellement dérivable) en x et si f admet une dérivée en x relativement à tout n -uple, l'application $D^n f(x)$:

$$\begin{cases} (v_1, \dots, v_n) \longrightarrow \partial_{v_1 \dots v_n}^n f(x) & \text{si } v_i \neq 0 \text{ pour tout } i \leq n, \\ (0, \dots, v_n) \longrightarrow 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

de E^n dans F étant multilinéaire et séparément continue (resp. continue). Si f est n fois dérivable (resp. continuellement dérivable) en tout $x \in A$, f est n fois dérivable (resp. continuellement dérivable) sur A .

Proposition 5-1: Si f est n fois (continuellement) dérivable sur A , alors ses dérivées relativement à un p -uple, où $p \leq n$, sont $n-p$ fois (continuellement) dérivables sur A .

Démonstration: Supposons la proposition démontrée si f est $n-1$ fois (continuellement) dérivable sur A et supposons que f est n fois dérivable (continuellement) sur A . L'application $\partial_{v_1 \dots v_p}^p f$ est $n-p-1$ fois (continuellement) dérivable sur A et pour tout $n-p$ uuple, on a:

$$\partial_{v_{p+1} \dots v_n}^{n-p} (\partial_{v_1 \dots v_p}^p f(x)) = \partial_{v_1 \dots v_n}^n f(x),$$

donc l'application $D^{n-p}(\partial_{v_1 \dots v_p}^p f(x))$, restriction de $D^n f(x)$ au sous-espace engendré par $(v_{p+1}, \dots, v_n)$ est séparément continue (resp. est continue).

Définition 5-3: On dit que f est n fois différentiable sur A si f est n fois continûment dérivable et si l'application $D^n f$:

$$\begin{cases} (x, (v_1, \dots, v_n)) \longrightarrow \partial_{v_1 \dots v_n}^n f(x) & \text{si } v_i \neq 0 \text{ pour tout } i \\ (x, (0, \dots, v_n)) \longrightarrow 0 & \text{si il existe } i \text{ tel que } v_i = 0 \end{cases}$$

de $A \times E^n$ dans F est continue. L'application $D^n f: x \rightarrow D^n f(x)$ de A dans $l(E^n, F)$ est appelée n -ième différentielle de f sur A .

Théorème 5-4: Si f est n fois différentiable sur A , alors l'application $\partial_{v_1 \dots v_p}^p f: x \rightarrow \partial_{v_1 \dots v_p}^p f(x)$ est $(n-p)$ fois différentiable sur A et f est $(n-1)$ fois différentiable sur A .

Démonstration: Soit $(v_1, \dots, v_p)$ un p -uple donné. L'application $\partial_{v_1 \dots v_p}^p f$ est $(n-p)$ fois dérivable sur A d'après la proposition 5-1. La continuité de $D^n f$ entraîne celle de l'application:

$$D^{n-p} \cdot \partial_{v_1 \dots v_p}^p f: \begin{cases} (x, (v_{p+1}, \dots, v_n)) \longrightarrow \partial_{v_1 \dots v_n}^n f(x) \\ (x, (v_{p+1}, \dots, 0)) \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } v_i \neq 0 \text{ pour tout } i \\ \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

Donc $\partial_{v_1 \dots v_p}^p f$ est $(n-p)$ fois différentiable sur A . Par définition, f est $(n-1)$ fois dérivable continûment sur A . Nous allons montrer la continuité de l'application $D^{n-1} f$:

$$\begin{cases} (x, (v_1, \dots, v_{n-1})) \longrightarrow \partial_{v_1 \dots v_{n-1}}^{n-1} f(x) & \text{si } v_i \neq 0 \text{ pour tout } i \\ (x, (v_1, \dots, 0)) \longrightarrow 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'application $\partial_{v_1 \dots v_{n-1}}^{n-1} f$ étant différentiable sur A, l'application: $k \longrightarrow \partial_{v_1' \dots v_{n-1}'}^{n-1} f(x + kv_n')$ est une fonction vectorielle continuellement dérivable pour tout $k > 0$ tel que le segment $[x, x + kv_n']$ soit contenu dans A. Par suite on a:

$$\partial_{v_1' \dots v_{n-1}'}^{n-1} f(x + kv_n') - \partial_{v_1' \dots v_{n-1}'}^{n-1} f(x) = \int_0^k \partial_{v_1' \dots v_{n-1}'}^n f(x + k'v_n') dk'$$

où le deuxième est une intégrale vectorielle faible sur F. En vertu de cette relation et de la continuité de $D^n f$ en $(x, (v_1, \dots, v_{n-1}, 0))$, la méthode déjà appliquée précédemment (paragraphe 4) montre que pour tout voisinage V de 0 dans F, il existe des voisinages U_i de 0 dans E, où $i \leq n$, tels que l'on ait: si $v_i' \in v_i + U_i$, où $i \leq n$, et $x + k'v_n' \in A$, alors:

$$\partial_{v_1' \dots v_{n-1}'}^{n-1} f(x + kv_n') - \partial_{v_1' \dots v_{n-1}'}^{n-1} f(x) \in kV/2$$

Puisque $D^{n-1}f(x)$ est continue en $(v_1, \dots, v_{n-1})$, à V sont associés des voisinages U_i' de 0 dans E tels que l'on ait:

$$\partial_{v_1' \dots v_{n-1}'}^{n-1} f(x) - \partial_{v_1' \dots v_{n-1}'}^{n-1} f(x) \in V/2,$$

pour tout $v_i' \in v_i + U_i'$, où $i \leq n-1$. Ces relations impliquent que l'on a, pour tout $x' \in (x + U_n) \cap A$ et tout $v_i' \in v_i + U_i \cap U_i'$:

$$D^{n-1}.f(x', (v_1', \dots, v_{n-1}')) - D^{n-1}.f(x, (v_1, \dots, v_{n-1})) \in V.$$

Donc f est $(n-1)$ fois différentiable sur A.

Corollaire: Si f est n fois différentiable sur A, alors ses dérivées relativement à tout p-uple sont q fois différentiables sur A, pour tout entier $q \leq n-p$ et tout entier p compris entre 0 et n (on pose: $f = {}^0f$).

Théorème 5-5: Si f est n fois différentiable sur A , alors l'application $D^p f$ de A dans $L_c(E^p, F)$ (muni de la topologie de la convergence compacte) est $(n-p)$ fois différentiable sur A .

Démonstration: Supposons le théorème démontré si f est $(n-1)$ fois différentiable sur A et montrons qu'il est vrai si f est n fois différentiable sur A , ce qui prouvera le théorème par récurrence puisque nous l'avons déjà démontré si f est 1 fois différentiable sur A d'après le théorème 4-3. Si f est n fois différentiable sur A , alors f est $(n-1)$ fois différentiable sur A d'après le théorème précédent, donc $D^p f$ est $(n-p-1)$ fois différentiable sur A . Montrons que si $(v_{p+1}, \dots, v_n)$ est un $(n-p)$ -uple donné, alors l'application $\partial_{v_{p+1} \dots v_{n-1}}^{n-p-1} (D^p f)$ est dérivable en tout point x de A dans la direction v_n et admet pour dérivée l'application:

$$\begin{cases} (v_1, \dots, v_p) \longrightarrow \partial_{v_1 \dots v_p v_{p+1} \dots v_n}^n f(x) & \text{si } v_i \neq 0 \\ & \text{pour tout } i \leq p \\ (v_1, \dots, 0) \longrightarrow 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme f est n fois différentiable sur A , la dérivée relativement à $(v_1, \dots, v_{n-1})$ est différentiable d'après le théorème 5-4 et en employant la même méthode que dans la démonstration de ce théorème, on prouve que si $x + kv_n \in A$, on a:

$$\begin{aligned} q(k, (v_1, \dots, v_p)) &= \left\langle (v_1, \dots, v_p), \partial_{v_{p+1} \dots v_n}^{n-p-1} (D^p f(x + kv_n)) \right\rangle \\ &= \left\langle (v_1, \dots, v_p), \partial_{v_{p+1} \dots v_n}^{n-p-1} (D^p f(x)) \right\rangle \\ &= \partial_{v_1 \dots v_n}^n f(x) \\ &= \int_0^1 [\partial_{v_1 \dots v_n}^n f(x + k' v_n) - \partial_{v_1 \dots v_n}^n f(x)] dt' \end{aligned}$$

En vertu de la continuité de l'application:

$$x \longrightarrow [(v_1, \dots, v_p) \longrightarrow \langle (v_1, \dots, v_n), D^n f(x) \rangle]$$

de E dans $l_c(E^p, F)$, à tout voisinage V de 0 dans F et à tout compact K dans E^p correspond un voisinage U de 0 dans E tel que, pour tout $(v_1, \dots, v_p) \in K$ et tout $kv_n \in U$, on ait:

$$q(k, (v_1, \dots, v_p)) \in kV,$$

ce qui prouve la dérivabilité de l'application:

$$\partial_{v_{p+1} \dots v_{n-1}}^{n-p-1} (D^p f)$$

dans la direction de v_n . Enfin l'application de A dans $l_c(E^p, F)$:

$$(x, (v_{p+1}, \dots, v_n)) \longrightarrow [(v_1, \dots, v_p) \longrightarrow \langle (v_1, \dots, v_n), D^n f(x) \rangle]$$

est continue d'après la continuité de $D^n f$.

Corollaire 1: Si E est métrisable, pour que f soit n fois différentiable sur A , il faut et il suffit que f soit $(n-1)$ fois différentiable sur A et que l'application $D^{n-1}f$ de A dans $l_c(E^{n-1}, F)$ soit différentiable sur A .

Démonstration: D'après le théorème 5-4, ces conditions sont nécessaires. Montrons qu'elles sont suffisantes. Soit $(v_1, \dots, v_n)$ un n -uple donné; la dérivabilité de $D^{n-1}f$ en x dans la direction de v_n entraîne que, pour tout voisinage V de 0 dans F , il existe un nombre $k > 0$ tel que l'on ait:

$$\langle (v_1, \dots, v_{n-1}), D^{n-1}f(x + kv_n) - D^{n-1}f(x) - \langle v_n, D(D^{n-1}f(x)) \rangle \rangle \in V$$

pour tout $k > 0$. Ceci prouve que l'application $\partial_{v_1 \dots v_{n-1}}^{n-1} f$

est dérivable dans la direction de v_n , sa dérivée en x étant:

$$\langle (v_1, \dots, v_{n-1}), \langle v_n, D(D^{n-1}f(x)) \rangle \rangle.$$

Puisque E est métrisable, il y a une injection canonique de

$C(A \times E, l_c(E^{n-1}, F))$ dans $C(A \times E^n, F)$, donc la continuité de l'application: $(x, v_n) \longrightarrow \partial_{v_n}(D^{n-1}f(x))$ entraîne celle de l'application:

$$(x, (v_1, \dots, v_n)) \longrightarrow \langle (v_1, \dots, v_{n-1}), \partial_{v_n}(D^{n-1}f(x)) \rangle.$$

et f est n fois différentiable sur A , sa n -ième différentielle en x étant: $D(D^{n-1}f)(x)$.

Théorème 1-6 (Formule de Taylor): Si f est n fois différentiable sur A , alors f est n fois différentiable en tout point x de A .

Démonstration: Posons

$$\Delta^n f(x, h) = f(x+h) - f(x) - \langle h, Df(x) \rangle - \dots - (1/n!) \langle (h, \dots, h), D^n f(x) \rangle.$$

Pour tout $h' \in E$, l'application: $t \longrightarrow f(x+th')$ est n fois différentiable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Par suite, on a:

$$\Delta^{n-1} f(x, th') = \int_0^t \frac{t^{n-1}}{n!} \langle (h, \dots, h), D^n f(x+th') \rangle dt',$$

où l'intégrale est une intégrale vectorielle faible sur F . Il en résulte:

$$\begin{aligned} \Delta^n f(x, th') &= \Delta^{n-1} f(x, th') - (1/n!) \langle (h, \dots, h), D^n f(x+th') \rangle \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^t t^{n-1} \langle (h, \dots, h), D^n f(x+th') - D^n f(x) \rangle dt'. \end{aligned}$$

Soit $h' \in E$. L'application $D^n f$ étant continue en $(x, (h, \dots, h))$, pour tout voisinage V de 0 dans F , il existe deux semi-normes p et p' sur E telles que les conditions: $p(h'-h) < 1$ et $p'(t'h') < 1$ entraînent:

$$\langle (h', \dots, h'), D^n f(x+th') \rangle - \langle (h', \dots, h'), D^n f(x) \rangle \in V'.$$

Un raisonnement déjà utilisé prouve alors que l'on a sous les

mêmes conditions: $\Delta^n f(x, th') \in (t^n/n!) \vee$, c'est-à-dire:

$$j_0^n \Delta^n f(x, h) = 0.$$

Corollaire 1: Si f est n fois différentiable sur A et si K est un compact de E , posons:

$$\begin{aligned} m_x(t, v) &= \Delta^n f(x, tv)/t^n && \text{si } t \geq 0, v \in E \text{ et } x+tv \in A \\ m_x(0, v) &= 0 && \text{pour tout } v \in E. \end{aligned}$$

Alors l'ensemble des applications m_x , où $x \in K \cap A$, est équicontinu en $(0, v)$, pour tout $v \in E$.

Démonstration analogue à celle du corollaire 1 du théorème 4-2.

Corollaire 2: Si f est n fois différentiable sur A , alors, pour $p < n$, l'application définie par:

$$\begin{aligned} d^p f(t, v) &= [x \rightarrow \Delta^{n-p} D^p f(x, tv)/t^{n-p}] && \text{si } t \geq 0, v \in E, x+tv \in A \\ d^p f(0, v) &= [x \rightarrow 0] && \text{pour tout } v \in E, \end{aligned}$$

est une application continue en $(0, v)$, à valeurs dans $C_c(A, l_c(E^p, F))$

Démonstration: D'après les théorèmes 1-4 et 1-5, l'application $D^p f$ est une application $(n-p)$ fois différentiable sur A , à valeurs dans $l_c(E^p, F)$. Du corollaire 1 résulte que, pour tout voisinage V de 0 dans F , pour tout compact K dans E et tout compact K' dans E^p , et pour tout $v \in E$, il existe un voisinage U de 0 dans E et un nombre $a > 0$ tels que les conditions $x \in K$, $w \in K'$, $v' \in v+U$ et $t < a$ entraînent:

$$\begin{aligned} \langle w, D^p f(x+tv') - D^p f(x) - \langle tv', D^{p+1} f(x) \rangle - \dots \\ \dots - (t^{n-p}/(n-p)!) \langle v', \dots, v', D^n f(x) \rangle \rangle \in t^{n-p} V, \end{aligned}$$

donc l'application $d^p f$ est continue en $(0, v)$.

Nous allons maintenant définir un autre mode de différen-

tiabilité d'ordre n sur un ouvert. Soit S un ensemble de parties bornées de E tel que tout point de E appartienne au moins à un élément de S . Tous les ensembles S que nous considérerons dans la suite jouiront de cette propriété.

Nous désignerons par $L_S^p(E, F)$ l'espace localement convexe défini par récurrence de la manière suivante:

$$L_S^1(E, F) = L_S(E, F) ,$$

$$L_S^{p+1}(E, F) = L_S(E, L_S^p(E, F)) .$$

Soit $H_S^p(E, F)$ l'espace localement convexe défini de la façon suivante: Un élément de $H_S^p(E, F)$ est une application S -hypocontinue de E^p dans F , c'est-à-dire une application g de E^p dans F , séparément continue et telle que, pour tout voisinage V de 0 dans F et pour toute famille finie $(s_i)_{i \leq p}$ d'éléments de S , il existe un voisinage U de 0 dans E tel que l'on ait:

$$g(U \times s_1 \times \dots \times s_p) \subset V .$$

La topologie sur $H_S^p(E, F)$ est celle de la convergence uniforme dans les ensembles de la forme: $s_1 \times \dots \times s_p$, où $s_i \in S$, pour tout $i \leq p$.

Soit a_p l'isomorphisme canonique de $L_S^p(E, F)$ sur $H_S^p(E, F)$ qui associe à $g' \in L_S^p(E, F)$ l'application g :

$$(v_1, \dots, v_p) \longrightarrow \langle v_1, \langle \dots, \langle v_p, g' \rangle \dots \rangle \rangle .$$

Un sous-espace de $H_S^p(E, F)$ est le sous-espace $\tilde{H}_S^p(E, F)$ dont les éléments sont les applications S^p -hypocontinues de E^p dans F , c'est-à-dire les applications g , invariantes par

permutation des variables telles que, pour tout voisinage V de 0 dans F et toute famille finie $(s_i)_{i \leq p-1}$ d'ensembles de S , il existe un voisinage U de 0 dans E tel que l'on ait:

$$g(s_1 \times \dots \times s_{j-1} \times U \times s_{j+1} \times \dots \times s_p) \in V$$

pour tout j compris entre 1 et p . On a un isomorphisme canonique $\tilde{a}_p$ de $\tilde{H}_S^p(E, F)$ sur un sous-espace vectoriel de $L_S^p(E, F)$.

Nous noterons encore $l_S(E^p, F)$ l'espace des applications multilinéaires continues de E^p dans F muni de la topologie de la convergence uniforme dans les ensembles de la forme : $\prod_{i \leq p} s_i$ où $s_i \in S$ pour tout $i \leq p$. On a un isomorphisme canonique b_p de $l_S(E^p, F)$ sur un sous-espace vectoriel de $L_S^p(E, F)$.

Définition 5-6: On dit que f est n fois S -différentiable sur A si f est $(n-1)$ fois S -différentiable sur A et si l'application: $x \longrightarrow D^{(n-1)}f(x)$ de A dans $L_S^{n-1}(E, F)$ est S -différentiable sur A ; on a posé ici:

$$D^{(1)}f(x) = Df(x) ; \quad D^{(n)}f(x) = D(D^{(n-1)}f(x)).$$

L'application $D^{(n)}f(x)$ est appelée n -ième différentielle de f en x et l'application $D^{(n)}f: x \longrightarrow D^{(n)}f(x)$, n -ième différentielle de f sur A .

Proposition 1-2: Si f est n fois S -différentiable sur A , alors f est n fois S' -différentiable sur A , pour tout ensemble $S' \subset S$.

Démonstration: Si $S' \subset S$, on a une injection canonique continue i_p de $L_S^p(E, F)$ dans $L_{S'}^p(E, F)$. Si f est S -différentiable sur A , Df considéré comme application de A dans $L_{S'}^1(E, F)$ est sa S' -

différentielle. Supposons démontré que si f est $n-1$ fois S -différentiable, l'application: $i_{n-1} \circ D^{(n-1)}f$ est sa $(n-1)$ -ième S -différentielle. $D^{(n-1)}f$ étant S -différentiable sur A , le théorème 4-4 entraîne que $i_{n-1} \circ D^{(n-1)}f$ est S -différentiable sur A , sa différentielle étant:

$$D(i_{n-1} \circ D^{(n-1)}f) = i_n \circ D^{(n)}f.$$

Il en résulte que f est n fois S -différentiable sur A .

Théorème 5-7: Pour que f soit n fois S -différentiable sur A , il faut et il suffit que f soit n fois dérivable sur A et que, pour tout $p \leq n$, l'application $D^p f$ soit une application S -différentiable sur A , à valeurs dans $\tilde{H}_S^p(E, F)$.

Démonstration: Si f est n fois S -différentiable sur A , alors f est n fois dérivable sur A , sa dérivée relativement au n -uplet $(v_1, \dots, v_n)$ étant: $\langle (v_1, \dots, v_n), a_n^{-1} \circ D^{(n)}f \rangle$. Comme les dérivées relativement à un p -uplet sont indépendantes de l'ordre de ce p -uplet, on a: $D^p f = \tilde{a}_p^{-1} \circ D^{(p)}f \in \tilde{H}_S^p(E, F)$ et, en vertu du théorème 4-4, $D^p f$ est S -différentiable sur A , pour tout $p \leq n$. Inversement supposons le théorème démontré si f est $(n-1)$ fois dérivable sur A . L'application $D^{n-1}f$ étant S -différentiable sur A , l'application: $D^{(n-1)}f = \tilde{a}_{n-1} \circ D^{n-1}f$ est une application S -différentiable de A dans $L_S^p(E, F)$, donc f est n fois S -différentiable sur A .

Remarque: Si on suppose seulement $D^p f$ à valeurs dans $H_S^p(E, F)$, on obtient la notion d'application semi-holonome (pour la définition précise, voir paragraphes 8 et 9).

Théorème 5-8: Si f est n fois dérivable sur A et si l'application $D^p f : x \longrightarrow D^p f(x)$ est une application continue de A dans $\tilde{H}_S^p(E, F)$ pour tout $p \leq n$, posons:

$$\Delta^p f(x, th) = f(x+th) - f(x) - \langle th, Df(x) \rangle - \dots - \frac{t^p}{p!} \langle (h, \dots, h), D^p f(x) \rangle.$$

Alors pour tout $s \in S$ et tout voisinage V de 0 dans F , il existe un voisinage U de 0 dans E tel que les conditions:

$$h \in s, \quad th \in U, \quad x+th \in A \quad \text{entraînent} \quad \Delta^p f(x, th) \in (t^p/p!) V.$$

Démonstration: La restriction de f à toute droite étant n fois différentiable, on a:

$$\Delta^p f(x, th) = (t^{p-1}/p!) \int_0^t \langle (h, \dots, h), D^p f(x+t'h) - D^p f(x) \rangle dt'.$$

Comme $D^p f$ est continue, pour tout voisinage V de 0 dans F et pour tout $s \in S$, il existe un voisinage U de 0 dans E tels que les conditions: $h \in s$, $th \in U$ et $x+th \in A$ entraînent:

$$\langle (h, \dots, h), D^p f(x+th) - D^p f(x) \rangle \in V,$$

donc, sous les mêmes conditions, on a: $\Delta^p f(x, th) \in (t^p/p!) V$ en utilisant un raisonnement déjà utilisé.

Corollaire: Si E est normé, si f est $(n-1)$ fois b -différentiable et si l'application: $x \longrightarrow D^{(n-1)}f(x)$ de A dans $L_b^{n-1}(E, F)$ est dérivable sur A l'application: $x \longrightarrow D(D^{(n-1)}f(x))$ étant continue dans $L_b^n(E, F)$, alors f est n fois b -différentiable sur A .

En effet en appliquant le théorème à un ensemble s borné ouvert, une démonstration analogue à celle de la proposition 2-8 montre que $D^{(n-1)}f$ est différentiable en tout point de A , donc que f est n fois b -différentiable sur A .

Théorème 5-9: Si f est n fois différentiable sur A , alors f est n fois c -différentiable sur A .

Démonstration: Supposons démontré que si f est $(n-1)$ fois différentiable sur A , alors f admet $b_{n-1} \circ D^{n-1}f$ pour c -différentielle sur A , où b_{n-1} désigne l'injection canonique de $L_c(E^{n-1}, F)$ dans $L_c^{n-1}(E, F)$. Si f est n fois différentiable sur A , l'application $D^{n-1}f$ est c -différentiable sur A d'après le théorème 5-2, donc $b_{n-1} \circ D^{n-1}f$ est c -différentiable sur A , en vertu du théorème 4-4. Sa différentielle est l'application:

$$v_n \longrightarrow b_{n-1}(\langle v_n, D(D^{n-1}f) \rangle),$$

c'est-à-dire $b_n \circ D^n f$.

Corollaire: Si E est métrisable, pour que f soit n fois différentiable sur A , il faut et il suffit que f soit n fois c -différentiable sur A .

Démonstration: L'application b_p est alors un isomorphisme de $L_c(E^p, F)$ sur $L_c^p(E, F)$. Par suite, si f est $(n-1)$ fois différentiable sur A et si l'application $D^{(n-1)}f$ est c -différentiable sur A , il en est de même de l'application $D^{n-1}f = b_{n-1}^{-1} \circ D^{(n-1)}f$, donc f est n fois différentiable sur A d'après le corollaire du théorème 5-2.

Théorème 5-10: L'espace $D^n(A, F)$ (resp. $D^n S(A, F)$) des applications n fois différentiables (resp. S -différentiables) sur A , à valeurs dans F , est un sous-espace vectoriel de $D^{n-1}(A, F)$ (resp. $D^{n-1}S(A, F)$) qui contient $L(E, F)$.

Théorème 5-11: Si f est n fois différentiable sur A et si g

est une application n fois différentiable sur un ouvert A' de F , à valeurs dans un espace localement convexe G , alors gof est une application n fois différentiable sur $A'' = A \cap f^{-1} A'$). On a:

$$\begin{aligned} \langle (v_1, \dots, v_n), D^n \text{gof}(x) \rangle = \\ = \sum_i \langle \langle (v_{i_1}, \dots, v_{i_1+j_1}), D^{j_1} f \rangle, \langle (v_{i_2}, \dots, v_{i_2+j_2}), D^{j_2} f \rangle, \\ \dots, \langle (v_{i_k}, \dots, v_{i_k+j_k}), D^{j_k} f \rangle \rangle, D^{j_1+\dots+j_k} g(f(x)) \rangle \end{aligned}$$

où j_m varie entre 1 et m, chaque terme de la somme étant tel que l'on ait: $(v_{i_1}, \dots, v_{i_1+j_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k+j_k}) = (v_1, \dots, v_n)$.

Démonstration: La formule indiquée est vraie pour $n = 1$. On la démontre par récurrence; en effet si elle est démontrée pour $n-1$, le théorème 3-3 permet de voir que la dérivée, dans la direction de v_n , de $\langle (v_1, \dots, v_{n-1}), D^{n-1} g(f(x)) \rangle$ a la valeur indiquée dans l'énoncé pour $\langle (v_1, \dots, v_n), D^n g(f(x)) \rangle$. Puisque les applications $D^p.f$ et $D^p.g$ sont continues pour tout $p \leq n$, une démonstration analogue à celle du théorème 4-4 prouve que $D^n.\text{gof}$ est une application continue sur $A'' \times E^n$.

Théorème 5-12: Les théorèmes 4-5 et 4-6 et leurs corollaires sont aussi valables en remplaçant différentiable (resp. S-différentiable) sur A par n fois différentiable (resp. S-différentiable) sur A .

Les démonstrations sont analogues à celles des théorèmes correspondants.

Définition 5-7: On dit que f est indéfiniment différentiable

(resp. indéfiniment S-différentiable) sur A si f est n fois différentiable (resp. n fois S-différentiable) sur A, quel que soit l'entier naturel n.

Théorème 5-13: Si f est indéfiniment différentiable sur A, alors f est indéfiniment c-différentiable sur A. Si E est métrisable, il y a identité entre applications indéfiniment différentiables et applications indéfiniment c-différentiables sur A.

Théorème 5-14: La composée de deux applications indéfiniment différentiables sur des ouverts est une application indéfiniment différentiable sur un ouvert.

Ces théorèmes sont des conséquences immédiates des théorèmes précédents, ainsi que les résultats suivants:

Théorème 5-15: L'espace des applications de A dans F, qui sont indéfiniment différentiables (resp. S-différentiables) sur A est un sous-espace vectoriel $D(A,F)$ (resp. $DS(A,F)$) de $D^n(A,F)$ (resp. $D^nS(A,F)$) quel que soit l'entier naturel n.

On voit immédiatement que si f est indéfiniment différentiable sur A, alors ses dérivées par rapport à tout p-uple, quel que soit l'entier naturel p, sont indéfiniment différentiables sur A. Les différentielles de f sont aussi indéfiniment différentiables sur A, à valeurs dans $L_c(E^p, F)$. Si f est indéfiniment S-différentiable sur A, alors l'application $D^{(p)}f$ de A dans $L_S^p(E, F)$ est indéfiniment S-différentiable sur A.

quel que soit p . De plus les théorèmes 4-5 et 4-6 et leurs corollaires sont encore vrais si on remplace différentiable (resp. S -différentiable) par indéfiniment différentiable (resp. indéfiniment S -différentiable) sur A .

Exemple: Si E est une algèbre topologique, tout polynôme est indéfiniment différentiable. Si E est une algèbre normée, la fonction exponentielle est indéfiniment différentiable. Plus généralement, on peut définir des polynômes sur un espace localement convexe de la façon suivante:

Définition 5-8: Un polynôme de E , de degré p , est une application indéfiniment différentiable de E dans F telle que, pour tout entier $r > p$, on ait: $D^r f(x) = 0$ (fonction identiquement nulle) pour tout $x \in E$.

Proposition 5-3: Pour qu'une application indéfiniment différentiable de E dans F soit un polynôme de degré p , il faut et il suffit que sa restriction à toute droite de E soit un polynôme de degré inférieur ou égal à p .

6- TOPOLOGIES SUR L'ESPACE DES APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES

Soient E et F deux espaces localement convexes et A un ouvert de E . Nous poserons dans tout ce paragraphe et le suivant: $D^n = D^n(A, F)$ et $D^n S = D^n S(A, F)$ (voir théorème 5-10) Nous allons munir ces espaces de topologies localement convexes compatibles avec leur structure vectorielle.

A un élément $f \in D^n$ correspond la suite $(f, D^1.f, \dots, D^n.f)$, où $D^i.f \in C(A \times E^i, F)$. Ceci détermine une injection canonique de D^n dans $\bigcap_{i \leq n} C(A \times E^i, F)$.

Définition 6-1: Soient S et S'_i des ensembles de parties bornées de E , où i varie entre 1 et n . Nous appelons topologie de la S - S'_i convergence sur D^n la topologie induite sur D^n par la topologie produit: $\bigcap_{0 \leq i \leq n} C_{S'_i \times S_i}(A \times E^i, F)$, où S'_i représente l'ensemble des parties de E de la forme $s_1 \times \dots \times s_n$, où $s_i \in S$ pour i compris entre 0 et n .

Muni de cette topologie, D^n sera noté $D^n_{S'_i-S}$. Si $S = S'_i$ est l'ensemble de tous les compacts de E , pour tout $i \leq n$, on notera D^n_c l'espace topologique correspondant.

Pour la topologie de la S - S'_i convergence, un système fondamental de voisinages de 0 est obtenu de la façon suivante: Soient $(s_i)_{i \leq n}$ une famille de parties de S et $s'_i \in S'_i$ pour tout $i \leq n$; soit V un voisinage de 0 dans F ; alors l'ensemble des applications f , n fois différentiables sur A , telles que:

$f(s'_0) \subset V$; $D^i.f(s'_i \times s_1 \times \dots \times s_i) \subset V$ où $1 \leq i \leq n$, est un voisinage de 0 dans $D^n_{S'_i-S}$, que nous désignerons par $U((s'_i), s_i, V)$.

Proposition 6-1: Si les ensembles appartenant à S et S'_i sont compacts et si tout point de E appartient au moins à un élément de S et de S'_i pour tout $i \leq n$, alors la topologie de la S - S'_i convergence est compatible avec la structure vectorielle de D^n ,

séparée et localement convexe.

Démonstration: La topologie de la $S-S'_i$ convergence est moins fine que la topologie de la convergence compacte sur $C(A \times E^i, F)$, donc compatible avec la structure vectorielle de $C(A \times E^i, F)$. Par suite la topologie induite sur D^n par la topologie produit de ces topologies a les propriétés indiquées.

Quand nous considérerons une topologie de $S-S'_i$ convergence sur D^n , il s'agira toujours d'une topologie associée à des ensembles S et S'_i ayant les propriétés indiquées dans la proposition 6-1.

Définition 6-2: Soient S' et S'_i , où i est un entier compris entre 1 et n , des ensembles de bornés de E , où $S' \subset S$. On appelle topologie de la $S-S'_i$ convergence sur $D^n S$ la topologie induite par la topologie $\mathcal{C}_{S'_i}(A, E) \times \prod_{i \leq n} \mathcal{C}_{S'_i}(A, L_{S'_i}^i(E, F))$ sur le sous-espace image canonique de $D^n S$ par l'application:

$$f \longrightarrow (f, D^{(1)}f, \dots, D^{(n)}f).$$

Muni de la topologie de la $S-S'_i$ convergence, $D^n S$ sera noté $D^n S_{S'_i}$. Si $S = S'_i$ est l'ensemble de tous les compacts de E , pour tout $i \leq n$, nous écrirons seulement $D^n c$ pour désigner l'espace $D^n c$ muni de la topologie de la $c-c$ convergence. Nous supposons toujours que tout point de E appartient au moins à un élément de S et de S'_i pour tout $i \leq n$, que tout élément de S'_i est compact pour $i \leq n$. Alors la topologie de la $S-S'_i$ convergence est compatible avec la structure vectorielle de $D^n S$, séparée et localement convexe.

Un système fondamental de voisinages pour la topologie de la S - S'_i convergence sur $D^n S$ est obtenu de la façon suivante: Soient $(s_i)_{i \leq n}$ une famille d'éléments de S ; pour tout $i \leq n$, soit $s'_i \in S'_i$; soit V un voisinage de 0 dans F . Alors l'ensemble des fonctions n fois S -différentiables sur A telles que:

$$f(s'_0) \subset V; \quad D^{(i)}f(s'_i) \subset W(s_1 \times \dots \times s_i, V), \quad i \leq n,$$

où $W(s_1 \times \dots \times s_i, V)$ désigne l'ensemble des $g \in L_S^i(E, F)$ tels que $\langle (v_1, \dots, v_i), g \rangle \in V$ pour tout $v_j \in s_j$, où $j \leq i$, est un voisinage de 0 dans $D^n S_{S'_i}$, que nous noterons $U(s_i, s'_i, V)$.

Proposition 6-2: Si $D^n = D^n S$, la topologie de la S - S'_i convergence sur D^n est identique à la topologie de la S - S'_i convergence sur $D^n S$.

Résulte de la définition du système fondamental des voisinages de 0 dans chacun des espaces considérés.

Corollaire: L'injection canonique de D^n dans $D^n S$ est continue.

Définition 6-3: On dit qu'un ensemble S de parties de E vérifie la condition P si toute application de E dans un espace localement convexe G est continue si sa restriction à tout ensemble $s \in S$ est continue.

Théorème 6-1: Soient S et S'_i , où $i \leq n$, des ensembles de parties de E tels que S'_i vérifie la condition F dans E et que S^i vérifie la condition F dans E^i . Alors, si F est complet, les espaces $D^n_{S'_i-S}$ et $D^n S_{S'_i}$ sont complets.

Démonstration: La condition P entraîne que l'injection canonique

b_p de $l_S(E^p, F)$ dans $L_S^p(E, F)$ soit un isomorphisme sur $L_S^p(E, F)$; donc $D^n S_i$ s'identifie à un sous-espace vectoriel topologique

de $\bigcap_{0 \leq i \leq n} C_{S_i}(A, l_S(E^i, F))$ par l'injection canonique:

$$f \longrightarrow (b_i^{-1} \circ D^{(i)} f)_{i \leq n}.$$

Il en résulte que f est n fois S -différentiable sur A si et seulement si f est $(n-1)$ fois S -différentiable sur A et si $D^{n-1}f = b_{n-1} \circ D^{(n-1)}f$ est S -différentiable sur A , à valeurs dans $l_S(E^{n-1}, F)$. De plus toute application S -différentiable sur A est différentiable sur A . La condition P entraîne aussi que $l_S(E^i, F)$ est fermé dans l'espace de toutes les applications de E^i dans F , donc complet. Par conséquent $C_{S_i}(A, l_S(E^i, F))$,

qui est fermé dans l'espace de toutes les applications de A dans $l_S(E^i, F)$ est complet. Soit (G_j) un filtre de Cauchy dans $D^n S_i - S$ (resp. $D^n S_i$). Le filtre formé des ensembles d'applications

$D^i g_j$ (resp. $D^{(i)} g_j$), où $g_j \in G_j$, est un filtre de Cauchy (G_j^i) dans $C_{S_i}(A, l_S(E^i, F))$, donc converge vers une application

g_i dans cet espace. Il nous suffit de montrer que g_0 est n fois différentiable (resp. S -différentiable) sur A et admet pour p -ième différentielle (resp. S -différentielle) sur A l'application g_p . Ceci se déduit du lemme suivant:

Lemme: Soit (G_j) un filtre de Cauchy dans $D^1 S_1 - S$ tel que (G_j^1) converge vers g_1 dans $C_{S_1}(A, l_S(E, F))$ et que (G_j^0) converge vers g dans $C_{S_0}(A, F)$. Alors g est différentiable sur A et admet g_1

pour différentielle sur A (Les hypothèses sont les mêmes que dans le théorème 6-1).

Démonstration: g est dérivable dans la direction de $v \in E$ en tout point $x \in A$. En effet, les applications:

$$t \longrightarrow f(x+tv), \quad t \in \mathbb{R}, \quad f \in G_j, \quad x+tv \in A,$$

sont différentiables en t ; elles convergent vers l'application: $t \longrightarrow g(x+tv)$ en x et leurs dérivées convergent uniformément vers $\langle v, g_1(x+tv) \rangle$ si $x+tv \in S$ et $x \in S$, où $S \in \mathcal{S}$. Comme l'application: $(x,v) \longrightarrow \langle v, g_1(x) \rangle$ est continue sur $A \times E$, l'application g est différentiable et admet g_1 pour différentielle.

Corollaire 1: Soit S_i un ensemble de parties d'un espace bornologique E vérifiant la condition P, pour tout $i \leq n$. Si F est complet, alors $D^n_{S_i - S}$ et $D^n_{S_i}$ sont complets.

En effet, un produit dénombrable d'espaces bornologiques est bornologique et par suite (ex. 18, p. 37 [5b]) $l_c(E^{\mathbb{P}}, F)$ est complet. La démonstration du théorème prouve alors le corollaire.

Corollaire 2: Si E est métrisable et F complet, D^n_c est complet.

En effet, E est bornologique; toute application dont la restriction à tout compact est continue est continue et $C_c(A, l_c(E^i, F))$ étant fermé dans l'espace de toutes les applications de A dans $l_c(E^i, F)$ muni de la topologie de la convergence compacte est complet.

Théorème 6-2: Soit S_i un ensemble de parties de E vérifiant la condition P et S un ensemble de parties de E tel que S^i véri-

fié la condition P dans E^i . Si E est tonnelé et F quasi-complet,
 $D^n_{S'_1-S}$ et $D^n S_{S'_1}$ sont quasi-complets.

Démonstration: Montrons que si B est une partie bornée fermée de $D^n_{S'_1-S}$, alors B est complet. En effet, la condition P entraîne que $C_{S'_1-S}^1(A \times E^i, F)$ est isomorphe à $C_{S'_1}(A, C_{S_i}(E^i, F))$. Ainsi la topologie de la $S-S'_1$ convergence sur D^n est identique à la topologie image réciproque par l'application:

$$f \longrightarrow (f, D^1 f, \dots, D^n f)$$

de la topologie: $C_{S'_0}(A, F) \times \prod_{i \leq n} C_{S'_1}(A, l_S(E^i, F))$. Il en résulte

que B est l'adhérence d'un ensemble d'applications $f \in D^n$ telles, que, pour toute famille $(s'_i)_{i \leq n}$ d'éléments de S'_1 , il existe des bornés M_i dans $l_S(E^i, F)$ pour lesquels on a:

$$f(s'_0) \subset M_0; \quad D^i f(s'_i) \subset M_i, \quad \text{pour tout } i \leq n.$$

Comme E est tonnelé, il en est de même pour E^i et $l_S(E^i, F)$ est quasi-complet (corollaire 2 page 31, [5b]). Soit (G_j) un filtre de Cauchy dans B et (G_j^i) l'ensemble des applications $D^i f$, où $f \in G_j$. Alors (G_j^i) est un filtre de Cauchy dans $C_{S'_1}(A, l_S(E^i, F))$

et le filtre (G_j^i / s'_i) , formé en prenant les restrictions à $s'_i \in S'_1$ des applications $D^i f$, où $f \in G_j$, est un filtre de Cauchy dans $C(s'_i, \bar{M}_i)$ muni de la topologie de la convergence uniforme; puisque $\bar{M}_i$ est complet, ce filtre admet un point adhérent g_i / s'_i . Puisque S'_1 vérifie la condition P, l'application g_i dont la restriction g_i / s'_i appartient à $C(s'_i, l_S(E^i, F))$ pour tout $s'_i \in S'_1$, est continue sur A, donc appartient à $C_{S'_1}(A, l_S(E^i, F))$. En vertu du lemme, ceci prouve que g_0 est n fois différentiable

En vertu du lemme, ceci prouve que g_0 est n fois différentiable sur A , sa i -ième différentielle sur A étant g_i et le filtre (G_j) converge vers g_0 dans $D^n_{S'_i-S}$. Par conséquent cet espace est quasi-complet. On démontre de même que $D^n S'_i$ est quasi-complet en remarquant que la condition P pour S^i entraîne que $L_S(E^i, F)$ et $L_S^i(E, F)$ sont isomorphes, donc qu'il y a identité entre applications différentiables et S -différentiables sur A .

Corollaire 1: Soit S'_i un ensemble de parties de E vérifiant la condition P , pour tout $i \leq n$. Si E est bornologique et F quasi-complet, alors $D^n_{S'_i-c}$ est quasi-complet ainsi que $D^{nc}_{S'_i}$.

En effet, $L_c(E^i, F)$ est quasi-complet pour tout $i \leq n$ et la démonstration du théorème 6-2 s'applique encore.

Corollaire 2: Si E est métrisable et F quasi-complet, alors D^{nc} est quasi-complet.

Théorème 6-3: Si E est un espace tonnelé et quasi-complet et si F est un espace de Montel, la trace sur $D^{n-1}_{S'_i-S}$ d'un ensemble borné dans $D^n_{S'_i-S}$ est précompact, si $S'_i \subset S'_{i+1}$ pour tout entier $i \leq n$.

Démonstration: Soit B un ensemble borné dans $D^n_{S'_i-S}$. Pour tout voisinage V de 0 dans F et pour toute famille (s'_i, s_i) , où $s_i \in S$ et $s'_i \in S'_i$ pour tout $i \leq n$, il existe un nombre $k > 0$ tel que:

$$f(s'_0) \subset kV \quad \text{et} \quad D^i.f(s'_i \times s_1 \times \dots \times s_i) \subset kV$$

pour tout $f \in B$ et tout $i \leq n$. A l'ensemble B correspond l'en-

semble B_i des applications $D^i f$ de A dans $l_S(E^i, F)$, où $f \in B$. Il suffit de prouver que pour tout $i \leq n$ l'ensemble B_i est précompact dans $C_{S'_i}(A, l_S(E^i, F))$. Pour tout $s'_i \in S'_i$ et tout i -uplet $(v_1, \dots, v_i)$, l'ensemble des éléments $\langle (v_1, \dots, v_i), D^i f(x) \rangle$, où $x \in s'_i$ et $f \in B$, est borné dans F et par suite relativement compact. Donc l'ensemble $B_i(s'_i)$ des applications $D^i f(x)$, où $f \in B$ et $x \in s'_i$ est simplement borné dans $l_S(E^i, F)$. L'espace E^i étant tonnelé, le théorème de Banach-Steinhaus prouve que l'ensemble $B_i(s'_i)$ est équicontinu. Il résulte alors du théorème d'Ascoli que $B_i(s'_i)$ est précompact. Montrons que les restrictions des applications de B_i à un ensemble $s'_i \in S'_i$ forment un ensemble équicontinu. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \langle (v_1, \dots, v_i), D^i f(x + t v_{i+1}) - D^i f(x) \rangle &= \\ &= \int_0^t \langle (v_1, \dots, v_{i+1}), D^{i+1} f(x + t' v_{i+1}) \rangle dt' \end{aligned}$$

où l'intégrale est une intégrale vectorielle faible sur F , en appliquant la méthode utilisée au paragraphe 4. Nous pouvons supposer s'_i convexe car, E étant quasi-complet, l'enveloppe convexe d'un compact est relativement compacte. Soit V un voisinage de 0 dans F et soit $(s_j)_{j \leq i}$ une famille d'éléments de S . D'après ce qui précède il existe des voisinages U_j de 0 dans E , où $j \leq i$, tels que les conditions : $f \in B$, $v_j \in U_j$ pour tout $j \leq i$ et $x + t' v_{i+1} \in s'_i$ entraînent :

$$\langle (v_1, \dots, v_{i+1}), D^{i+1} f(x + t' v_{i+1}) \rangle \in V.$$

Comme s_j est compact pour tout $j \leq i$, il existe des nombres $k'_j > 0$ tels que l'on ait : $k'_j s_j \subset U_j$ pour tout $j \leq i$. Il en résulte

que, si $v_j \in s_j$ pour tout $j \leq i$ et si $v_{i+1} \in U_{i+1} / k'_i$, où $k'_i = k'_1 \dots k'_i$, et si $x + t'v_{i+1} \in s'_i$, on a:

$$\langle (v_1, \dots, v_{i+1}), D^{i+1}f(x + t'v_{i+1}) \rangle =$$

$$= \langle (v_1/k'_1, \dots, v_i/k'_i, k'_i v_{i+1}), D^{i+1}f(x + t'v_{i+1}) \rangle \in V$$

On en déduit que, sous les mêmes conditions, on a:

$$\langle (v_1, \dots, v_i), D^i f(x + tv_{i+1}) - D^i f(x) \rangle \in tv.$$

Ceci prouve que, pour tout $s'_i \in S'_i$ et pour tout $i \leq n$, les restrictions à s'_i des applications de B_i forment un ensemble équicontinu. Le théorème d'Ascoli démontre, alors que B_i est précompact dans $C_{S'_i}(A, l_S(E^i, F))$ pour tout $i \leq n$, et par suite B est précompact dans $D^{n-1}_{S'_1-S}$.

Rappelons qu'un espace (DF) est un espace localement convexe E satisfaisant aux propriétés suivantes:

- 1) E admet une suite fondamentale de parties bornées.
- 2) Si $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de voisinages de 0 dans E qui sont fermés et dont l'intersection est un ensemble absorbant U , alors U est un voisinage de 0 dans E .

En particulier, un espace normé et le dual fort d'un espace métrisable sont des espaces (DF). On voit facilement qu'un espace (DF) possède les propriétés suivantes:

- 1) Pour qu'une application linéaire de E dans un espace localement convexe G soit continue, il faut et il suffit que sa restriction à tout borné soit continue.
- 2) Si E est quasi-complet, alors E est complet.

- 3) Un produit fini d'espaces (DF) est un espace (DF).
- 4) Si E et F sont des espaces (DF), tout ensemble d'applications bilinéaires séparément continues de $E \times F$ dans un espace localement convexe G, borné pour la topologie de la convergence simple, est équicontinu.

Théorème 6-4: Soient E un espace (DF) et F un espace quasi-complet; si pour tout $i \leq n$, l'ensemble S'_i vérifie la condition P, alors $D^{nb}_{S'_i-b}$ est quasi-complet. Si E est un espace (DF) complet, si F est un espace de Montel et si $S'_i \subset S'_{i+1}$ pour tout $i \leq n$, alors la trace sur $D^{n-1}_{S'_i-c}$ d'un borné de $D^{nb}_{S'_i-c}$ est précompact.

Démonstration: La première partie résulte du théorème 6-2 et de la propriété E^0 1. Si E est un espace (DF), on a un isomorphisme canonique de $L_b^1(E, F)$ sur $L_b(E^1, F)$, pour tout $i \leq n$. Si $f \in D^{nb}$, on a alors $D^i f(x) \in L(E^i, F)$ pour tout $x \in A$. Soit B un borné dans $D^{nb}_{S'_i-c}$; c'est l'ensemble des applications n fois b-différentiables f telles que, pour tout voisinage V de 0 dans F et pour toute famille $(s'_j, s_j)_{j \leq n}$, où $s'_j \in S'_j$ et $s_j \in c$, il existe un nombre $k > 0$ tel que l'on ait:

$$f(s'_0) \in kV ; \quad D^i f(s'_i)(s_1 \times \dots \times s_i) \in kV \quad \text{pour tout } i \leq n.$$

La topologie de la S'_i-c convergence sur D^{nb} est celle induite par la topologie produit: $C_{S'_0}(A, F) \times \prod_{i \leq n} C_{S'_i}(A, L_c(E^i, F))$. Pour

montrer que B est précompact dans $D^{n-1}_{S'_i-c}$, il suffit de montrer que l'ensemble B_i formé des applications $D^i f$, où $f \in B$,

est précompact dans $C_{S'_i}(A, l_c(E^i, F))$ pour tout $i \leq n$. D'après le théorème d'Ascoli et en vertu de la compacité des éléments de S'_i , il suffit de montrer que l'ensemble B_i/s'_i des restrictions à s'_i des applications de B_i est équicontinu quel que soit $s'_i \in S'_i$ et que, pour tout $x \in A$, l'ensemble $B_i(x)$ des applications $D^i f(x)$, où $f \in B$, est précompact dans $l_c(E^i, F)$. Or l'ensemble $B_i(x)$ est borné pour la topologie de la convergence simple, donc équicontinu en vertu de la propriété 4 ci-dessus, et, pour tout i -uplet $(v_1, \dots, v_i) \in E^i$, l'ensemble:

$$(\langle (v_1, \dots, v_i), D^i f(x) \rangle), \quad \text{où } f \in B,$$

est borné dans F , donc relativement compact. Par suite $B_i(x)$ est précompact dans $l_c(E^i, F)$. Le même raisonnement que celui utilisé dans la démonstration du théorème 6-3 montre que l'ensemble B_i/s'_i est équicontinu puisque l'ensemble des applications $D^{i+1}f(x)$, où $f \in B$ et $x \in s'_i$, est simplement borné dans $l_c(E^{i+1}, F)$, et par suite équicontinu.

7- ESPACE DES APPLICATIONS INDÉFINIMENT DIFFÉRENTIABLES

Soient E et F deux espaces localement convexes et A un ouvert de E . Soit D l'espace vectoriel des applications indéfiniment différentiables sur A , à valeurs dans F . Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a une injection canonique de D dans D^n . Soit S un ensemble de parties bornées de E tel que tout point de E appartienne à un élément de S au moins. Posons $DS = DS(A, F)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a une injection canonique de DS dans $D^n S$.

Définition 7-1: Soient S et S'_i , pour tout $i \in \mathbb{N}$, des ensembles de parties bornées de E . On appelle topologie de la S - S'_i convergence sur D (resp. sur DS) la topologie la moins fine rendant continues les injections canoniques de D (resp. de DS) dans $D^n_{S'_i-S}$ (resp. dans $D^n_{DS_{S'_i}}$) pour tout entier n .

Muni de cette topologie limite projective, l'espace D (resp. DS) sera noté $D_{S'_i-S}$ (resp. $DS_{S'_i}$). Si S et S'_i sont, pour tout entier i , l'ensemble de tous les compacts de E , on écrira seulement D_c (resp. D_c).

Dans $D_{S'_i-S}$, un système fondamental de voisinages de 0 est formé des ensembles de la forme suivante: Pour tout $i \in \mathbb{N}$, soit $s_i \in S$ et $s'_i \in S'_i$; soit V un voisinage de 0 dans F et p un entier; l'ensemble des $f \in D$ tels que:

$$f(s'_0) \subset V; \quad D^{(i)}f(s'_i \times s_1 \times \dots \times s_i) \subset V \quad \text{pour tout } i \leq p$$

est un voisinage $U(s'_i, s_i, V, p)$ de 0 dans $D_{S'_i-S}$.

Dans $DS_{S'_i}$, un système fondamental de voisinages de 0 est formé des ensembles $U(s'_i, s_i, V, p)$ définis comme suit: Soient $s_i \in S$ et $s'_i \in S'_i$ pour tout $i \leq p$; soit V un voisinage de 0 dans F et soit $\tilde{V}_i(s_i, V)$ le voisinage de 0 dans $L_S^i(E, F)$ formé des g tels que $g(s_1 \times \dots \times s_i) \subset V$; alors $U(s'_i, s_i, V, p)$ est l'ensemble des $f \in DS$ tels que:

$$f(s'_0) \subset V \quad \text{et} \quad D^{(i)}f(s'_i) \subset \tilde{V}_i(s_i, V) \quad \text{pour tout } i \leq p.$$

Cette dernière condition peut aussi s'écrire:

$$D^{(i)}f(s'_i)(s_1 \times \dots \times s_i) \subset V,$$

où $D^i f(x)$ est l'image canonique dans $\tilde{H}_S^i(E, F)$ de $D^{(i)} f(x)$ (voir paragraphe 5).

Nous supposerons dans la suite que les ensembles appartenant à $S_i^!$, pour tout i , sont compacts. De plus, si l'espace étudié est D , nous supposerons aussi que les éléments de S sont compacts. Dans ces conditions, les topologies de $S-S_i^!$ convergence sont des topologies séparées localements convexes compatibles avec les structures vectorielles de D et de DS . Si S est un ensemble de parties de E tel que $D \subset DS$, alors la topologie de la $S-S_i^!$ convergence sur DS induit sur D la topologie de la $S-S_i^!$ convergence.

Théorème 7-1: Supposons que $S_i^!$ vérifie la condition F et que S^i vérifie la condition P dans E^i pour tout entier i . Si F est complet, alors $D_{S_i^!-S}$ et $DS_{S_i^!}$ sont complets.

En effet, pour tout i , l'espace $D_{S_i^!-S}^i$ est complet; par suite la topologie limite projective de ces topologies est une topologie d'espace complet.

Corollaire: Si $S_i^!$ vérifie la condition P pour tout $i \in \mathbb{N}$, si E est bornologique et F complet, les espaces $D_{S_i^!-c}$ et $Dc_{S_i^!}$ sont complets. En particulier, si E est métrisable et F complet, alors D_c est complet.

Théorème 7-2: Si, pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'ensemble $S_i^!$ vérifie la condition P et si S^i vérifie la condition P dans E^i , alors si E est tonnelé et F quasi-complet, les espaces $D_{S_i^!-S}$ et $DS_{S_i^!}$ sont

quasi-complets.

Démonstration: Un borné fermé B dans $D_{S'_1-S}$ a son image bornée dans $D^n_{S'_1-S}$ pour tout n . Si G est un filtre de Cauchy dans B , il converge vers g_n dans $D^n_{S'_1-S}$, pour tout n . Si $q \leq n$, alors G converge vers g_q dans $D^q_{S'_1-S}$ et par suite vers g_q dans $D^n_{S'_1-S}$ ce qui prouve que G converge vers $g = g_n$ dans $D_{S'_1-S}$.

Corollaire: Si S'_i vérifie la condition P pour tout i , si E est bornologique et F quasi-complet, alors $D_{S'_1-c}$ et $D_{S'_1}$ sont quasi-complets. Si E est métrisable et F quasi-complet, alors D_c est quasi-complet.

Théorème 7-3: Si E est tonnelé et quasi-complet, si F est un espace de Montel et si $S'_i \subset S'_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, alors tout borné de $D_{S'_1-S}$ est précompact.

En effet, si B est borné dans $D_{S'_1-S}$, alors B est borné dans $D^n_{S'_1-S}$, donc précompact dans $D^{n-1}_{S'_1-S}$ d'après le théorème 6-3. Par suite B est précompact dans $D_{S'_1-S}$.

Corollaire 1: Supposons que S'_i et S^i vérifient la condition P pour tout i et que $S'_i \subset S'_{i+1}$. Alors, si E est tonnelé et quasi-complet et si F est un espace de Montel quasi-complet, $D_{S'_1-S}$ est un espace de Montel.

En effet, tout borné de $D_{S'_1-S}$ est précompact et son adhérence est compacte puisque l'espace $D_{S'_1-S}$ est quasi-complet.

Corollaire 2: Si E est métrisable et complet et si F est un es-

pace de Montel quasi-complet, alors D_c est un espace de Montel quasi-complet.

Théorème 7-4: Si E est un espace (DF) et si F est un espace de Montel, alors tout borné de Db_{c-c} est précompact.

Ce théorème résulte de la démonstration du théorème 7-3 et du théorème 6-4.

8- APPLICATIONS DIFFERENTIABLES D'ORDRE TRANSFINI.

Soient E et F deux espaces localement convexes et A un ouvert de E .

Soit k_i l'injection canonique de $A \times E^{i+1}$ sur $A \times E^i$ telle que: $k_i(x, v_1, \dots, v_i, v_{i+1}) = (x, v_1, \dots, v_i)$. Soit $\bar{k}_i$ l'injection canonique: $(v_1, \dots, v_i, v_{i+1}) \longrightarrow (v_1, \dots, v_i)$ de E^{i+1} sur E^i . Soit $\lim_{i \in \mathbb{N}} \text{proj} (A \times E^i)$ l'espace limite projective de la suite d'espaces $A \times E^i$ relativement aux applications k_i . Rappelons que cet espace est le sous-espace du produit $\prod_{i \in \mathbb{N}} (A \times E^i)$ formé

des points $z = (z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ où $z_i = (x_i, v_1, \dots, v_i)$, $x_i \in A$, $v_j \in E$, tels que: $z_i = k_i(z_{i+1})$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Cet espace est muni de la topologie induite par la topologie produit. Soit de même $\lim_{i \in \mathbb{N}} \text{proj} E^i$ l'espace limite projective de la suite des espaces E^i relativement aux applications $\bar{k}_i$.

On a un isomorphisme canonique m de $A \times \lim_{i \in \mathbb{N}} \text{proj} E^i$ sur $\lim_{i \in \mathbb{N}} \text{proj} (A \times E^i)$ tel que:

$$m(x, (z_i)_{i \in \mathbb{N}}) = ((x, z_i))_{i \in \mathbb{N}}.$$

Nous identifierons désormais ces deux espaces.

Soit, pour tout entier i , une application f_i de $A \times E^i$ dans F . Si f_i est continue, l'application $f = (f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une application continue de $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} (A \times E^i)$ dans $F^{\mathbb{N}}$. La restriction $\bar{f}$

de f à $\lim_{i \in \mathbb{N}} \text{proj } (A \times E^i)$ est une application continue de

$$A \times \lim_{i \in \mathbb{N}} \text{proj } E^i \quad \text{dans} \quad F^{\mathbb{N}}.$$

Si l'application: $x \longrightarrow (y_i \longrightarrow f_i(x, y_i))$ est une application continue de A dans $C_c(E^i, F)$, pour tout i , l'application $\bar{f}$ qui associe à x la restriction de f à $\lim_{i \in \mathbb{N}} \text{proj } (\{x\} \times E^i)$ est une application continue de A dans $C_c(\lim_{i \in \mathbb{N}} \text{proj } E^i, F^{\mathbb{N}})$.

Soit f une application de A dans F , indéfiniment différentiable sur A . On peut lui associer la suite d'applications:

$$f' = (D^1.f, \dots, D^i.f, \dots),$$

où $D^i.f \in C(A \times E^i, F)$ et $D^i f(x) \in l(E^i, F)$ pour tout $x \in A$.

Posons: $\bar{f} = D^{\omega}.f$ et $\bar{f}'(x) = D^{\omega} f(x)$, avec les notations ci-dessus.

Définition 8-1: Si f est une application indéfiniment différentiable sur A , à valeurs dans F , l'application: $x \longrightarrow D^{\omega} f(x)$ est appelée différentielle d'ordre ω de f et notée $D^{\omega} f$.

De ce qui précède résulte que la différentielle d'ordre de f est une application continue de A dans $C_c(\lim_{i \in \mathbb{N}} \text{proj } E^i, F^{\mathbb{N}})$.

Définition 8-2. On dit qu'une application f de A dans F est $\omega+n$ fois différentiable sur A si f est indéfiniment différen-

tiable sur A et si l'application $D^\omega f$ est n fois différentiable sur $A \times \lim_{i \in \mathbb{N}} \text{proj } E^i$, à valeurs dans $F^{\mathbb{N}}$.

En particulier, un polynome sur E est $\omega+n$ fois différentiable, pour tout n.

Soit $DS(A, L_S^i(E, F))$ l'espace des applications indéfiniment S-différentiables de A dans $L_S^i(E, F)$. On a une injection canonique $D_{i+1, i}$ de $DS(A, L_S^i(E, F))$ dans $DS(A, L_S^{i+1}(E, F))$ qui, à g, associe sa S-différentielle Dg . Soit DS_c l'espace limite inductive localement convexe des espaces $DS(A, L_S^i(E, F))$ relativement à la famille d'applications $D_{i+1, i}$, c'est-à-dire l'espace obtenu de la façon suivante: Soit $D^\omega S$ l'espace quotient de $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} DS(A, L_S^i(E, F))$ par la relation d'équivalence ρ :

$(i, g) \rho (j, g')$ si et seulement si $g' = D_{j, j-1} \circ \dots \circ D_{i+1, i} g$; nous noterons $(\overline{i, g})$ la classe d'équivalence de (i, g) modulo ρ . Les applications $D_{i+1, i}$ sont des applications continues de $DS_c(A, L_S^i(E, F))$ dans $DS_c(A, L_S^{i+1}(E, F))$. Pour tout entier i, on a une injection canonique D_i de $DS_c(A, L_S^i(E, F))$ dans $D^\omega S$ qui associe à g la classe $(\overline{i, g})$. Nous munirons $D^\omega S$ de la topologie localement convexe la plus fine rendant les applications D_i continues (topologie limite inductive localement convexe).

On a une injection canonique de $DS(A, F)$ (paragraphe 7) dans $D^\omega S$ qui associe à f la classe $(\overline{i, D^{(i)} f}) = D^{(\omega)} f$. Soit $\tilde{D}^\omega S$ le sous-espace vectoriel de $D^\omega S$ image de $DS(A, F)$ et $\tilde{D}^\omega S_c$ l'espace $\tilde{D}^\omega S$ muni de la topologie induite par $D^\omega S_c$.

Définition 8-3: Soit f une application indéfiniment S-différentiable sur un ouvert A de E, à valeurs dans F. L'élément $D_S^{(\omega)} f$ de $D^\omega S$ est appelé S-différentielle d'ordre ω de f.

Un élément quelconque $(i, \overline{D^{(i)}g}) \in D^\omega S$ est la S-différentielle d'ordre ω de l'application g de A dans $DS(A, L_S^p(E, F))$, où (p, g) est le premier terme de la suite $(i, D^{(i)}g)$. Si $p \neq 0$, un tel élément sera appelé S-différentielle d'ordre ω non holonome. Si $p = 0$, alors $g \in DS(A, F)$ et $D_S^{(\omega)} g$ est dit holonome.

Soit b_i l'injection canonique de $L_S(E^i, F)$ dans $L_S^i(E, F)$. Pour tout i, l'application: $h \longrightarrow b_i \circ h$ est un homomorphisme de $DS_c(A, L_S(E^i, F))$ dans $DS_c(A, L_S^i(E, F))$. Il en résulte un homomorphisme canonique de $D^\omega S_c = \lim_{i \in N} \text{ind } DS_c(A, L_S(E^i, F))$ dans $D^\omega S_c$. En particulier, si f est indéfiniment différentiable sur A, on a: $D^i f \in D_c(A, L_c(E^i, F))$ d'après le théorème 5-5 et l'application: $f \longrightarrow D_c^\omega f = (i, \overline{D^i f})$ est un isomorphisme de $D_c(A, F)$ sur un sous-espace vectoriel de $D^\omega S_c$, que nous noterons $D^\omega S_c$.

Théorème 8-1: Avec les notations précédentes, l'application: $D_c^\omega f \longrightarrow D^\omega f$ est une injection continue de $D^\omega S_c$ dans $C_c(A, C_c(\lim_{i \in N} \text{proj } (E^i), F^N))$.

Définition 8-4: Soit f une application d'un ouvert A de E dans F. On dit que f est $\omega + n$ fois S-différentiable sur A si f est indéfiniment S-différentiable sur A et si l'application $D^\omega f$ de A dans $C_S(\lim_{i \in N} \text{proj } E^i, F^N)$ est n fois S-différentiable sur A.

Théorème 1-2: Si f est indéfiniment S -différentiable sur A , alors f est $\omega+n$ fois S -différentiable sur A pour tout entier n et l'on a: $D^{\omega+n}f(x) = D^{\omega}(D^n f(x))$, pour tout $x \in A$.

Ce théorème prouve que c'est la notion d'application $\omega+n$ fois différentiable sur A qu'il faut considérer et non celle d'application $\omega+n$ fois S -différentiable sur A . Les applications $\omega+n$ fois différentiables sur un ouvert ont des propriétés analogues à celles des applications différentiables sur un ouvert. Nous ne les étudierons pas ici, ce paragraphe étant donné seulement à titre de compléments.

Par induction transfinie, on définirait de même la notion d'application μ fois différentiable sur un ouvert, pour tout ordinal μ , admettant ou non un précédent.

Chapitre III

VARIETES DE DIMENSION INFINIE

Dans ce chapitre, nous allons montrer comment la théorie des variétés de dimension finie, r fois différentiables, peut s'étendre à l'aide de la notion de différentiabilité dans les espaces localement convexes. Nous nous limiterons aux questions générales que nous utiliserons dans la suite et reviendrons sur les détails dans un autre travail. Afin de raccourcir ce texte, les démonstrations sont seulement esquissées.

9- E-VARIETES DIFFERENTIABLES.

Soient E et F deux espaces localement convexes.

Définition 9-1: On appelle automorphisme local d'ordre r (resp. d'ordre infini) de E un homéomorphisme d'un ouvert U de E sur un ouvert U' de E qui est r fois différentiable (resp. indéfiniment différentiable) sur U et dont l'inverse est r fois différentiable (resp. indéfiniment différentiable) sur U' .

Les automorphismes locaux d'ordre r (resp. d'ordre infini) forment un pseudogroupe (voir [9a]) que nous désignerons par $\bigwedge^r(E)$ (resp. par $\bigwedge^\infty(E)$).

Définition 9-2: On dit que V est une E -variété r fois (resp.

indéfiniment) différentiable si l'on s'est donné un atlas A complet [9a] de E sur un ensemble V, compatible avec le pseudogroupe $\bigwedge^r(E)$ (resp. $\bigwedge^{cc}(E)$) et tel que la topologie définie sur V par A soit séparée.

Soient V une E-variété r fois différentiable, x un point de V et g une carte locale de A telle que $x = g(u)$, où $u \in E$. Soit V' une F-variété r fois différentiable, y un point de V' et g' une carte locale de l'atlas A' définissant la structure de F-variété de V', telle que $y = g'(v)$, où $v \in F$. Soit f une application d'un ouvert U de V dans V' qui applique x sur y.

Définition 9-2: Avec les notations précédentes, on dit que f est r fois différentiable en x (resp. sur un ouvert) si l'application $g'^{-1}fg$ est une application r fois différentiable en u (resp. sur un ouvert).

Cette définition analogue à celle donnée dans le cas de dimension finie [9a] ne dépend pas du couple (g, g') de cartes locales choisi; en effet, soient h et h' deux autres cartes locales; on a alors:

$h = g \circ a$; $h' = g' \circ a'$; $a \in \bigwedge^r(E)$ et $a' \in \bigwedge^r(F)$;
du théorème 5-11 résulte que l'application $h'^{-1}fh = a'^{-1}(g'^{-1}fg)a$ est r fois différentiable sur un ouvert si et seulement si $g'^{-1}fg$ est r fois différentiable sur un ouvert.

Soit $D_x^r(V, V')$ l'ensemble des couples (f, x), où f est une application r fois différentiable sur un voisinage de x, à va-

leurs dans V' . Soit ρ_r la relation d'équivalence:

$(f, x) \sim (f', x)$ si et seulement si $f(x) = f'(x)$ et si les différentielles d'ordre p en u de $g'^{-1}fg$ et de $g'^{-1}f'g$ sont égales en x pour tout $p \leq r$.

D'après le théorème 5-11, cette relation d'équivalence est invariante lorsque g et g' sont remplacées par d'autres cartes locales de A et A' resp.

Définition 9-1: Avec les notations précédentes, la classe d'équivalence de f modulo ρ_r est appelée jet infinitésimal d'ordre r , ou r -jet, de f en x et notée $j_x^r f$. Le point x est la source du r -jet et le point $f(x)$ son but.

Cette définition est en accord avec la définition 5-1, dans le cas où V et V' sont des espaces localement convexes. L'application $j^r f: x \mapsto j_x^r f$ est définie sur l'ouvert sur lequel f est r fois différentiable, à valeurs dans l'ensemble $J_x^r(V, V')$ des r -jets de V en x , dans V' ; elle sera appelée le flot d'ordre r de f .

Soit $J^r(V, V')$ l'ensemble des r -jets de V en V' :

$$J^r(V, V') = \bigcup_{x \in V} J_x^r(V, V').$$

Théorème 9-1: $J^r(V, V)$ est une catégorie topologique [9b].

La loi de composition dans $J^r(V, V)$ est définie par:

$$(j_{x'}^r f')(j_x^r f) = j_x^r f'f = f'(j_x^r f) \quad \text{si et seulement si } x' = f(x).$$

L'unité à droite de $j_x^r f$ est le r -jet en x de l'application identique de V , noté j_x^r ; son unité à gauche est $j_{x'}^r$; ainsi V est

une classe d'objets pour $J^r(V, V)$. La topologie de $J^r(V, V)$ admet pour base les ensembles de la forme $\hat{f}(U)$, où U est un ouvert de V et $\hat{f}(U)$, l'image de U par le flot d'ordre r de l'application f qui est r fois différentiable sur U . Le sous-groupe des éléments inversibles de $J^r(V, V)$ est formé des r -jets des applications inversibles sur un ouvert de V qui sont r fois différentiables ainsi que leur inverse. L'ensemble des r -jets inversibles de source et but x est appelé groupe d'isotropie d'ordre r de V en x . Ce groupe est isomorphe au groupe d'isotropie de E en O , que nous noterons $M^r(E)$.

Soit $M^r(E, F)$ l'ensemble des r -jets de source O et de but O des applications r fois différentiables d'un ouvert de E dans F . Nous munirons $M^r(E, F)$ de la structure vectorielle définie à partir de celle de F . Soit S un ensemble de parties compactes de E tel que tout point de E appartienne au moins à un élément de S . Si U est un voisinage ouvert de O dans E , soit $D_{C-S}^r(U, F)$ l'espace localement convexe considéré au paragraphe 6. L'application qui associe à $f \in D_{C-S}^r(U, F)$ la restriction de f à un ouvert $U' \subset U$ est une application linéaire continue dans $D_{C-S}^r(U', F)$. L'espace limite inductive des espaces $D^r(U, F)$ relativement à la famille de ces injections canoniques, lorsque U parcourt les voisinages ouverts de O , s'identifie à $M^r(E, F)$, en identifiant la classe $(\overline{f}, U)$, où $f \in D^r(U, F)$, à $j_O^r(\overline{t}_Y^{-1} f)$, où $\overline{t}_Y^{-1}$ désigne la translation: $v \longrightarrow y - v$ de F dans F . Nous noterons $M_S^r(E, F)$ l'espace limite inductive localement convexe des espaces $D_{C-S}^r(U, F)$, c'est-à-dire l'espace $M^r(E, F)$ muni de la topologie

localement convexe la plus fine rendant continues les injections canoniques de $D_{c-S}^r(U, F)$ dans $M^r(E, F)$.

Théorème 9-2: L'espace $J^r(V, V')$ est muni d'une structure d'espace fibré de base $V \times V'$, de fibre isomorphe à $M^r(E, F)$, de groupe structural $M^r(E) \times M^r(F)$.

La projection de $J^r(V, V')$ sur $V \times V'$ est l'application: $j_X^r \longrightarrow (x, f(x))$. Soit ${}_y J_X^r(V, V')$ l'ensemble des r -jets de V dans V' , de source x et de but y . Soient g une carte locale de l'atlas A de E dans V telle que $g(u) = x$ et g' une carte locale de l'atlas A' de F dans V' telle que $y = g'(v)$; soit $a_r(g, g')$ l'application:

$$j_X^r f \longrightarrow j_0^r(t_v^{-1} g'^{-1} f g t_u), \quad \text{où } f(x) = y,$$

t_z désignant encore la translation: $z' \longrightarrow z + z'$ de E dans E ou de F dans F . La classe des applications $a_r(g, g')$, où $g \in A$ et $g' \in A'$ engendre un atlas complet de $J^r(V, V')$ dans $V \times V' \times M^r(E, F)$ compatible avec le groupe $M^r(E) \times M^r(F)$ opérant sur $M^r(E, F)$ par:

$$((s, s'), X) \longrightarrow s' X s^{-1}, \quad \text{où } s \in M^r(E), s' \in M^r(F), X \in M^r(E, F).$$

L'espace fibré ainsi défini n'est généralement pas à groupe structural topologique si $M^r(E)$, $M^r(F)$ et $M^r(E, F)$ sont munis des topologies $M_C^r(E)$, $M_C^r(F)$ et $M_C^r(E, F)$. Mais en utilisant le théorème 5-11 et la proposition 9, page 42 de [5b], on montre que les applications:

$$(s_1, s) \longrightarrow s_1 s \quad \text{et} \quad ((s', s), X) \longrightarrow s'^{-1} X s$$

de $M_C^r(E) \times M_C^r(E)$ dans $M_C^r(E)$ et de $M_C^r(E) \times M_C^r(F) \times M_C^r(E, F)$ dans $M_C^r(E, F)$ sont c - ξ hypocontinues, où ξ désigne l'ensemble des parties équicontinues de $M_C^r(E)$ ou de $M_C^r(F)$. Nous dirons que

$J^r(V, V')$ est un espace fibré à groupe structural hypotopologique. D'une manière générale, on peut montrer que les espaces fibrés à groupe structural hypotopologique ont des propriétés analogues à celles que possèdent les espaces fibrés à groupe structural topologique. En particulier, ils admettent un espace fibré principal associé, à groupe structural hypotopologique, dont la fibre est isomorphe au groupe G , le groupe structural étant G opérant par translation à gauche sur lui-même. Toutefois, il faudra toujours vérifier qu'un espace associé est un espace fibré à groupe structural hypotopologique.

Nous désignerons par j^{kr} l'application de $J^r(V, V')$ dans $J^k(V, V')$, où $k < r$, qui associe à $j_x^r f$ le jet d'ordre k : $j_x^k f$. Si $k = 0$, nous poserons: $J^0(V, V') = V \times V'$.

Théorème 9-3: j^{kr} est une application continue de $J^r(V, V')$ sur $J^k(V, V')$, munis de la topologie d'espace fibré (théorème 9-2).
Si $V = V'$, alors j^{kr} est aussi un foncteur continu de la catégorie topologique $J^r(V, V)$ sur la catégorie topologique $J^k(V, V)$.
 (Théorème 9-1).

10- PROLONGEMENTS D'UNE E-VARIÉTÉ DIFFÉRENTIABLE.

Soient E , F et G des espaces localement convexes. Soit V une E -variété r fois différentiable et V' une F -variété r fois différentiable, les atlas définissant les structures de variété de V et V' étant resp. A et A' . Les notations du paragraphe 9 seront utilisées sans références.

Définition 10-1: On appelle G^r -vitesse d'origine $x \in V$ un élément de $J^r(G, V)$ de source 0 et de but x . On appelle G^r -covitesse de source x un élément de $J^r(V, G)$ de source x et de but 0.

Nous désignerons par $T_G^r(V)$ (resp. $T_G^{r*}(V)$) l'ensemble des G^r -vitesses (resp. G^r -covitesses) sur V . Si G est un espace de dimension finie p , il y a un isomorphisme canonique de $T_G^r(V)$ sur ${}_x J_O^r(R^p, V)$ (resp. de $T_G^{r*}(V)$ sur ${}_O J_x^r(V, R^p)$); nous identifierons ces espaces et les désignerons par $T_p^r(V)$ (resp. $T_p^{r*}(V)$). Les éléments de $T_p^r(V)$ seront appelés p^r -vitesses, ceux de $T_p^{r*}(V)$, p^r -covitesses. Si $p = r = 1$, une 1-vitesse est un vecteur et une 1-covitesse, un covecteur; $T_1^1(V)$ sera noté $T(V)$; l'ensemble $T_x(V)$ des vecteurs d'origine x est l'espace tangent à V en x .

Définition 10-2: Un r -jet inversible de E dans V , de but x , est appelé repère d'ordre r de V en x . L'ensemble $H^r(V)$ des repères d'ordre r de V est appelé prolongement principal d'ordre r de V .

L'inverse d'un repère est un corepère de même ordre, dont l'ensemble sera désigné par $H^{r*}(V)$.

Si $V = E$, un vecteur d'origine x de E s'identifie à un vecteur lié $(\overline{x, u})$; un vecteur d'ordre r de E , d'origine x est de la forme $j_0^r g$ et est déterminé par la donnée des vecteurs:

$\langle (x, e, \dots, e), D^p g(0) \rangle$, où $p \leq r$ et e est un point donné de R .

Inversement, à $((x, u_i)_{i \leq r}) \in (E_x)^r$ correspond le vecteur d'ordre r et d'origine x : $j_0^r(a \rightarrow x + \sum_{i \leq r} (a^i / i!) u_i)$. Par suite

l'application canonique de $T_1^r(E)$ sur $T_1^k(E)$ s'identifie à l'appli-

cation: $((x, u_i)_{i \leq r}) \longrightarrow ((x, u_i)_{i \leq k})$ de $(E_x)^r$ dans $(E_x)^k$.

Théorème 10-1: Pour tout $p \leq r$, $T_G^p(V)$ est un espace fibré $r-p$ fois différentiable, de base V , de fibre isomorphe à $M_C^p(G, E)$, de groupe structural hypotopologique $M_C^p(E)$; l'espace fibré principal associé est $H^p(V)$.

L'atlas complet B définissant la structure fibrée de $T_G^p(V)$ admet pour cartes locales les applications:

$j_0^p f \longrightarrow (x, j_0^p(t_y^{-1} g^{-1} f))$, où $g \in A$, $g(y) = x = \text{origine de } j_0^p f$, de $T_G^p(V)$ dans $V \times M_C^p(G, E)$. En particulier, $T_G^p(E)$ s'identifie à $E \times M_C^p(G, E)$. Le pseudogroupe $\bigwedge^p(E)$ se prolonge à $T_G^p(E)$, le prolongement de $a \in \bigwedge^p(E)$ étant l'application:

$(y, j_0^p h) \longrightarrow (a(y), j_0^p(\bar{t}_z^{-1} a \bar{t}_y h))$, où $h \in M_C^p(G, E)$ et $z = a(y)$; il en résulte que B est compatible avec le prolongement de $\bigwedge^p(E)$.

Corollaire: Si E est métrisable, $T_n^p(V)$ est à groupe structural topologique pour tout entier n . Si de plus E est complet et si son dual topologique E'_C muni de la topologie de la convergence compacte est métrisable, alors $T_G^p(V)$ est à groupe structural topologique si G est métrisable.

La démonstration utilise le fait que $L_C(E, E)$ est canoniquement isomorphe à $E'_C \otimes G$ (corollaire page 36 [16]) qui est métrisable (proposition 9 page 44 [16]).

Définition 10-3: On appelle prolongement (resp. régulier) d'ordre p de V un espace fibré (resp. $r-p$ fois différentiable) à groupe structural hypotopologique, associé au prolongement principal $H^p(V)$ (voir [9a]).

Les structures fibrées de $J^r(V, V')$ (théorème 9-2) et de $T_G^p(V)$ sont des structures de prolongement d'ordre r de $V \times V'$ et de prolongement régulier d'ordre p de V resp.

Théorème 10-2: $T_G^{r*}(V)$ admet une structure de prolongement d'ordre r de V , de fibre isomorphe à $M_C^r(E, G)$ et de groupe structural hypotopologique $M_C^r(E)$.

Pour tout $x \in V$, désignons par N_x la fibre de $T_G^{r*}(V)$ sur x munie de sa structure d'espace localement convexe; soit N'_x le dual topologique de N_x , muni de la topologie faible $\sigma(N'_x, N_x)$.

Définition 10-4: On appelle G -tenseur d'ordre r de type (p, q) en x sur V un élément du produit tensoriel $\otimes_{N_x}^p \otimes_{N'_x}^q$.

Théorème 10-3: L'ensemble des G -tenseurs d'ordre r de type (p, q) sur V admet une structure de prolongement d'ordre r de V , de fibres isomorphes au produit tensoriel topologique (projectif [17]) $\otimes_{N_x}^p \otimes_{N'_x}^q$.

Remarque: 10-1. Ce théorème est encore vrai en considérant sur N'_x une topologie comprise entre $\sigma(N'_x, N_x)$ et la topologie de Mackey $\tau(N'_x, N_x)$.

Théorème 10-4: Pour tout $k \leq r$, $J^k(V, V')$ admet une structure de prolongement régulier d'ordre k de V' (resp. de V), de fibres isomorphes à $T_F^{k*}(V)$ (resp. $T_E^k(V')$), à groupe structural hypotopologique $M_C^k(F)$ (resp. $M_C^k(E)$).

L'atlas complet définissant la structure de prolongement de V' est engendré par les cartes locales:

$$j_x^k f \longrightarrow (f(x), j_{x/Y}^{k-1} f), \quad \text{où } x \in A' \quad \text{et} \quad \varepsilon'(y) = x.$$

11- ESPACES D'APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES SUR UNE E-VARIÉTÉ.

Soient E , F et G des espaces localement convexes, V une E -variété r fois différentiable et V' une F -variété r fois différentiable, définies par les atlas complets A et A' resp.

Comme dans le cas de dimension finie [9a], on définit les prolongements non holonomes $\tilde{J}^k(V, V')$, où $k < r$, par récurrence: $\tilde{J}^{k+1}(V, V')$ est la sous-variété de $J^1(V, \tilde{J}^k(V, V'))$ formée des jets d'ordre 1 de sections locales de V dans $\tilde{J}^k(V, V')$. On définit de même les prolongements semi-holonomes d'ordre $k < r$: $\bar{J}^{k+1}(V, V')$ est la sous-variété de $\tilde{J}^{k+1}(V, V')$ formée des éléments $j_x^1 s$, où $x \in V$ et s est une section locale de V dans $\bar{J}^k(V, V')$ telle que: $s(x) = j_x^1(j^{k-1}s)$, où j^{k-1} désigne la projection canonique de $\tilde{J}^k(V, V')$ dans $\tilde{J}^{k-1}(V, V')$ prolongeant j^{k-1} (paragraphe 9).

Théorème 11-1: Si pour tout $p < r$ on munit $J^p(V, V')$ (resp. $\tilde{J}^p(V, V')$) resp. $\bar{J}^p(V, V')$) de sa structure de prolongement d'ordre p de $V \times V'$ (théorème 9-2) quelle que soit la variété M' considérée, alors $J^r(V, V')$ (resp. $\tilde{J}^r(V, V')$, resp. $\bar{J}^r(V, V')$) est isomorphe à une sous-variété de $J^{r-k}(V, \tilde{J}^k(V, V'))$ (resp. de $\tilde{J}^{r-k}(V, \tilde{J}^k(V, V'))$) resp. de $\bar{J}^{r-k}(V, \tilde{J}^k(V, V'))$.

Ce théorème se démontre par passage au point de vue local à l'aide de cartes; on utilise alors le fait que sur $M^p(E, F)$ les topologies limite inductives des topologies de $D^p_{C_c}(U, F)$

et de $D_c^p(U, F)$, où U décrit les voisinages ouverts de O dans E sont identiques (voir paragraphes 6 et 9).

Soit $D^r(V, V')$ l'ensemble des applications r fois différentiables sur un ouvert de V , à valeurs dans V' . Soit K un compact de V et U_r un ouvert de $J^r(V, V')$, muni de sa structure de prolongement d'ordre r de $V \times V'$. Soit $W(K, U_r)$ l'ensemble des applications qui sont r fois différentiables sur un ouvert contenant K , à valeurs dans V' , et telles que l'on ait $j^r f(K) \subset U_r$. Les ensembles $W(K, U_r)$ forment une base d'ouverts pour une topologie sur $D^r(V, V')$ que nous appellerons topologie compacte. Cette topologie est analogue à celle considérée dans [9a] sur un pseudogroupe de Lie de dimension finie.

Soit $f \in D^r(V, V')$ et $k \leq r$; à f correspond canoniquement l'application f_k de $T_G^k(V)$ dans $T_G^k(V')$ qui associe $j^k f X = f X$ à la G^k -vitesse X d'origine x . Soient K un compact de V et K' un compact de $T_1^{r-k}(V)$, muni de sa structure de prolongement d'ordre k de V , qui se projette sur V sur K . Soit U un ouvert de $J^k(V, V')$ muni de sa structure de prolongement d'ordre k de $V \times V'$ et U' un ouvert dans $T_1^{r-k}(J^k(V, V'))$ se projetant sur $J^k(V, V')$ sur U . Soit $W(K, K', U, U')$ l'ensemble des applications $f \in D^r(V, V')$ définies sur un ouvert contenant K et telles que $j^k f(K) \subset U$ et que le prolongement de f à $T_1^{r-k}(V)$ applique K' dans U .

Théorème 11-2: Avec les notations précédentes, les ensembles $W(K, K', U, U')$ forment une base de la topologie compacte sur $D^r(V, V')$.

Pour démontrer ce théorème, on se ramène à l'aide de cartes locales au cas local et on utilise le fait que $L_c^r(E, F)$ est isomorphe à un sous-espace de $L_c^{r-k}(E, L_c^k(E, F))$.

Remarque: 11-1. Les théorèmes 11-1 et 11-2 signifient, sous les hypothèses indiquées, qu'il y a transitivité des prolongements. Le théorème général de transitivité des prolongements du cas de dimension finie [9a] ne s'étend plus ici car les espaces fibrés considérés sont à groupe structural hypotopologique et non topologique.

Théorème 11-3: Si E est un espace de Fréchet dont le dual topologique E'_c est métrisable, alors le théorème général de transitivité des prolongements est valable.

Supposons désormais que V et V' sont indéfiniment différentiables. Une application f d'un ouvert de V dans V' est indéfiniment différentiable sur U si elle est r fois différentiable sur U pour tout entier r . Soit ρ_ω la relation d'équivalence entre applications indéfiniment différentiables pointées:

$(f, x) \sim (f', x)$ si et seulement si $j_x^r f = j_x^r f'$ pour tout r .

La classe d'équivalence de (f, x) modulo ρ_ω sera notée $j_x^\omega f$ et appelée jet infinitésimal d'ordre infini, ou ω -jet, de f en x .

Les points x et $f(x)$ sont encore appelés source et but de $j_x^\omega f$ et l'application $j^\omega: x \longrightarrow j_x^\omega f$, flot d'ordre infini de f .

Soit $J^\omega(V, V')$ l'ensemble des ω -jets de V dans V' et $M_c^\omega(E, F)$ l'espace vectoriel des ω -jets de source 0 et de but

O de E dans F , muni de la topologie localement convexe la moins fine rendant continues les applications: $j_{0g}^\omega \longrightarrow j_{0g}^r$ de $M^\omega(E, F)$ dans $M_C^r(E, F)$.

Théorème 11-4: Tous les résultats énoncés sur les r -jets et les prolongements d'ordre r d'une E -variété r fois différentiable se transposent au cas des ω -jets et des prolongements d'ordre infini.

L'ensemble $D^\omega(V, V')$ des applications indéfiniment différentiables d'un ouvert de V dans V' sera muni de la topologie compacte dont une base d'ouvert est formée des ensembles $W(K, U)$ suivante: K est un compact de V et U un ouvert de $J^\omega(V, V')$ muni de sa structure de prolongement d'ordre infini de $V \times V'$; alors $W(K, U)$ est l'ensemble des applications f indéfiniment différentiables sur un ouvert contenant K et telles que $j^\omega f(K)$ soit contenu dans U .

Théorème 11-5: Avec les notations précédentes, la topologie compacte sur $D^\omega(V, V')$ est la topologie localement convexe la moins fine rendant continues les injections canoniques i_r de $D^\omega(V, V')$ dans $D^r(V, V')$ muni de la topologie compacte.

Cas où V' est l'espace localement convexe F :

Soit V une E -variété r fois différentiable et f une application r fois différentiable d'un ouvert U de V dans F .

On appelle différentielle d'ordre r de f en x la F^r -covitesse: $d_x^r f = j_{x \rightarrow y}^{r-1} f$, où $y = f(x)$ (voir [9a]). L'application

$d^r f: x \longrightarrow d_x^r f$ de V dans $T_F^{r*}(V)$ se prolonge en une application $d^{r,p} f: X \longrightarrow (d_x^r f)X$, où x = origine de X , de $T_p^r(V)$ dans l'espace tangent en O à $T_F^{r*}(V)$, que nous identifierons à $M^r(\mathbb{R}^p, F)$.

Si $p = 1$, nous avons identifié $T_1^r(F)$ à F^r ; par suite l'application $d^{r,1} f$ s'identifie à une application de $T_1^r(V)$ dans F^r . En particulier, nous poserons: $D.f = d^{1,1} f$ et appellerons l'application $D.f$ de $T(V)$ dans F , première différentielle de f sur U . La restriction $Df(x)$ de $D.f$ à $T_x(V)$ est la différentielle en x de f , qui est une application linéaire continue de l'espace vectoriel topologique $T_x(V)$ dans l'espace des vecteurs libres de F . Si $X \in T_x(V)$, nous appellerons $Df(x)(X)$ la dérivée en x de f relativement à X , notée $\langle X, Df(x) \rangle$. Supposons définie la $(r-1)$ -ième différentielle $D^{r-1}.f$ de f , qui est une application de $T_1^{r-1}(V)$ dans F . Nous définirons par récurrence la r -ième différentielle $D^r.f$ de f comme la restriction à la sous-variété $T_1^r(V)$ de $T(T_1^{r-1}(V))$ de l'application $D.(D^{r-1}.f)$ de $T(T_1^{r-1}(V))$ dans F . Si $X \in T_1^r(V)$, nous identifierons X au jet semi-holonyme $j_{X'}^1 s$, où $X' = j^{r-1,r} X$ et où s est un relèvement de V dans $T^{r-1}(V)$. L'application $D^r.f$ est donc l'application:

$$X \longrightarrow \langle j_{X'}^1 s, D.(D^{r-1}.f)(X') \rangle.$$

L'image de X par $D^r.f$ est appelée r -ième dérivée de f relativement à X . La restriction de $D^r.f$ à l'ensemble des X qui se projettent sur V en x sera notée $D^r f(x)$, l'image de X par $D^r f(x)$, $\langle X, D^r f(x) \rangle$.

En particulier, si V est l'espace localement convexe E , alors $T_X^r(E)$ s'identifie à $(E_X)^r$ et l'application $D^r f(x)$ s'identifie à l'application de même symbole de $(E_X)^r$ dans F :

$$(\overrightarrow{x, u_i})_{i \leq r} \longrightarrow \langle (\overrightarrow{x, u_i})_{i \leq r}, D^r f(x) \rangle$$

considérée au paragraphe 5. L'application $D^r f$:

$$(x, (v_i)_{i \leq r}) \longrightarrow \langle (\overrightarrow{x, u_i})_{i \leq r}, D^r f(x) \rangle$$

de $U \times E^r$ dans F , où $v_i = t_X^{-1}(x, u_i)$ pour tout $i \leq r$, s'identifie à la r -ième différentielle de f .

La structure vectorielle de F définit sur $J_X^r(V, F)$ une structure vectorielle compatible avec la topologie induite par la topologie sous-jacente à la structure de prolongement d'ordre r de F . Soit U' un ouvert de F , K un compact de V et K_r un compact de $T_1^r(V)$, muni de sa structure de prolongement d'ordre r de V , qui se projette en K_p sur $T_1^p(V)$ pour tout $p \leq r$ et en K sur V . Soit $W(K_r, K, U')$ l'ensemble des applications f qui sont r fois différentiables sur un ouvert de V contenant K , à valeurs dans F et telles que l'on ait:

$$f(K) \subset U' \quad \text{et} \quad D^p f(K_p) \subset U' \quad \text{pour tout } p \leq r.$$

Théorème 11-5: Avec les notations précédentes, les ensembles $W(K_r, K, U')$ engendrent la topologie compacte sur $D^r(V, F)$.

Soit $D^r(U, F)$ le sous-ensemble de $D^r(V, F)$ formé des applications r fois différentiables sur l'ouvert U de V ; ce sous-ensemble est muni d'une structure vectorielle compatible avec la topologie induite par la topologie compacte. En particulier si U est le but d'une carte unique, l'espace ainsi obtenu s'identifie

à l'espace $D^r_c(U, F)$ considéré au paragraphe 6. Si U_1' est un ouvert de V contenu dans U , on a un homomorphisme canonique de $D^r(U, F)$ dans $D^r(U_1', F)$. L'espace localement convexe limite inductive des espaces localement convexes $D^r(U, F)$, où U parcourt les ouverts de V contenant x , relativement aux homomorphismes canoniques, est $J^r_x(V, F)$. Cette situation sera généralisée et étudiée dans la deuxième partie.

Problème: Il serait intéressant de déterminer pour quels sous-pseudogroupes de $\bigwedge^r(E)$ ou pour quelles topologies le théorème de transitivité des prolongements est valable sous sa forme générale. Ceci est vrai par exemple si E est un espace normé et si l'on considère la topologie de la convergence bornée au lieu de la topologie de la convergence compacte sur les espaces utilisés, le pseudogroupe compatible avec la structure de E -variété étant le pseudogroupe des automorphismes locaux r fois b -différentiables sur un ouvert de E . Dans le cas général, on ne peut pas remplacer les automorphismes locaux r fois différentiables par les automorphismes locaux r fois S -différentiables car ils ne forment plus un pseudogroupe, propriété qui est la base de toute cette étude.

DEUXIEME PARTIE

DISTRUCTURES

Le but de ce chapitre est de montrer comment l'application à l'Analyse fonctionnelle de théories algébriques permet d'unifier et généraliser un certain nombre de résultats obtenus par des méthodes totalement différentes. Cette question ainsi que ses applications est développée dans un article qui paraîtra ultérieurement. Ici, nous tâcherons de rendre l'exposé plus intuitif en nous limitant aux points les plus caractéristiques et en illustrant définitions et théorèmes par de nombreux exemples. Dans le dernier paragraphe, nous esquisserons quelques applications à des problèmes concrets. Les démonstrations ne seront pas indiquées car elles sont souvent longues. Nous admettons connue la théorie des espèces de structures locales et des catégories inductives (voir [9c] et [9d])

1- CATEGORIES INDUCTIVES VECTORIELLES TOPOLOGIQUES

1) Conventions:

Etant donnée une catégorie C , nous désignerons par C_0 la classe de ses unités, $\alpha(h)$ et $\beta(h)$ représentant resp. l'unité à droite (ou source) et l'unité à gauche (ou but) de $h \in C$.

Les unités seront souvent identifiées avec les objets correspondants. Le composé de $h \in C$ et de $h' \in C$, s'il est défini, sera désigné par $h'.h$. La catégorie dualisée de C (obtenue en prenant sur C la loi de composition: $(h, h') \longrightarrow h.h'$ si et seulement si $\beta(h') = \alpha(h)$) sera notée C^* .

Si C et C' sont des catégories, un foncteur de C vers C' sera supposé covariant, sauf indication contraire.

Dans une classe ordonnée, les bornes inférieure et supérieure d'une sous-classe A seront notées resp. $\bigcap A$ et $\bigcup A$ et appelées intersection et agrégat de A resp.

Si C est une catégorie inductive, le pseudoproduit de h et de h' , où $h \in C$ et $h' \in C$, sera noté $h'h$, s'il est défini. Rappelons que si C est régulière, le pseudoproduit de deux éléments quelconques est toujours défini.

2) Catégorie $\tilde{V}$:

Soit $\tilde{V}$ la classe dont les éléments sont les triplets (E', f, E) , où E et E' sont deux espaces vectoriels topologiques sur le corps R des réels, localement convexes, et où f est une application linéaire continue de E dans E' .

La classe $\tilde{V}$ sera munie d'une structure de catégorie de la façon suivante:

Le composé de (E'', f', E_1) et de (E', f, E) est défini si et seulement si $E_1 = E'$ et est égal alors à $(E'', f'.f, E)$, où $f'.f$ désigne l'application: $x \longrightarrow f'(f(x))$ de E dans E'' .

L'unité à droite de (E', f, E) est le triplet $(E, \text{id}(E), E)$, où $\text{id}(E)$ est l'application identité de E ; l'unité à gauche est $(E', \text{id}(E'), E')$. Les triplets $(E, \text{id}(E), E)$ seront identifiés à E . Ainsi la classe des espaces localement convexes est une classe d'objets pour $\tilde{V}$. Le sous-groupeïde V des éléments inversibles de $\tilde{V}$ est la sous-classe de $\tilde{V}$ formée des triplets (E', f, E) où f est un isomorphisme de E sur E' .

La catégorie $\tilde{V}$ est une sous-catégorie de la catégorie des applications continues d'un espace topologique dans un autre.

La catégorie $\tilde{V}$ sera munie d'une structure d'ordre de la manière suivante:

Un objet E' est induit par E , en symbole $E' < E$, si et seulement si E' est un sous-espace vectoriel de E muni d'une topologie plus fine que la topologie induite par E .

Un triplet (E'_1, f_1, E_1) est induit par (E', f, E) , en symbole:

$(E'_1, f_1, E_1) < (E', f, E)$, si et seulement si $E'_1 < E'$, $E_1 < E$ et si f_1 est la restriction de f à E_1 .

Pour cette relation d'ordre, $\tilde{V}$ admet pour plus petit élément le triplet $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$, noté 0 . Soient E_1 et E_2 deux espaces localement convexes induits par $E \in \tilde{V}_0$; soit e le sous-espace vectoriel de E intersection de E_1 et de E_2 , muni de la topologie localement convexe la moins fine rendant continues les injections canoniques de e dans E_1 et dans E_2 ; alors e est l'intersection de E_1 et de E_2 dans $\tilde{V}$. Si (E'_1, f_1, E_1) et (E'_2, f_2, E_2) sont deux éléments de $\tilde{V}$ induits par (E', f, E) , ils admettent

pour intersection dans $\tilde{V}$ le triplet (e', f', e) , où $e = E_1 \cap E_2$,
 $e' = E'_1 \cap E'_2$ et f' est la restriction de f à e .

Proposition 1-1: L'application I qui associe à $(E', f, E) \in \tilde{V}$ la classe des éléments qu'il induit vérifie la relation:

$$I(T' \cdot T) = I(T') \cdot I(T), \quad T \in \tilde{V}, \quad T' \in \tilde{V},$$

où $I(T') \cdot I(T)$ est la classe des composés $T'_1 \cdot T_1$ tels que $T'_1 < T'$ et $T_1 < T$. La restriction de I à V est un foncteur généralisé.

Soit ${}^2\tilde{V}$ la sous-catégorie de $\tilde{V} \times \tilde{V}$ formée des couples (T_1, T) tels que $T_1 < T$, munie la relation d'ordre:

$$(T'_1, T') < (T_1, T) \text{ si et seulement si } T' = 0 \text{ ou si } T' = T \text{ et } T'_1 < T_1.$$

Théorème 1-1: ${}^2\tilde{V}$ munie de la structure de catégorie produit et de la structure d'ordre définie ci-dessus est une catégorie inductive complète, régulière et normale à gauche.

Pour les définitions, voir [9c]. Le groupoïde distingué dans ${}^2\tilde{V}$ est la classe des couples (T_1, T) tels que $T \in V$ et $T_1 \in V$. De plus, ${}^2\tilde{V}$ est une catégorie complètement régulière à droite conformément à la définition suivante:

Définition 1-1: Une catégorie inductive régulière C est dite complètement régulière à droite (resp. à gauche) si le pseudo-produit Ee (resp. eE), où $e \in C_0$, $E \in C_0$ et $e < E$, est tel que $\beta(Ee) = E$ (resp. $\alpha(eE) = E$). Si pour tout couple (e, E) , où $e < E$, $E \in C_0$ et $e \in C_0$, on a soit $\beta(Ee) = E$, soit $\alpha(eE) = E$, on dit que C est complètement régulière.

La notion de catégorie complètement régulière d'un côté

est considérée, sans appellation particulière, dans [9d].

Si C et C_1 sont des catégories complètement régulières à droite (resp. à gauche), alors la catégorie produit $C \times C_1$ est complètement régulière à droite (resp. à gauche). Ceci n'est plus vrai si C et C_1 sont complètement régulières.

Remarque: 1-1- Soit p l'application de $\tilde{V}$ dans la catégorie inductive $\tilde{E}$ des applications d'un ensemble dans un ensemble qui associe à $(E', h, E) \in \tilde{V}$ le triplet $(p(E'), h, p(E))$, où $p(E)$ est l'ensemble sous-jacent à l'espace localement convexe E . Alors p est un foncteur de $\tilde{V}$ vers $\tilde{E}$ qui applique l'intersection de deux éléments majorés dans $\tilde{V}$ sur l'intersection de leurs images dans $\tilde{E}$. Si les éléments ne sont pas majorés dans $\tilde{V}$, on peut seulement affirmer que l'image par p de leur intersection dans $\tilde{V}$, si elle existe, est contenue dans l'intersection des images.

Une sous-catégorie $\tilde{V}'$ de $\tilde{V}$ est appelée sous-catégorie inductive faible de $\tilde{V}$ si la sous-catégorie ${}^2\tilde{V}'$ de ${}^2\tilde{V}$ formée des couples (T_1, T) , où $T_1 \in \tilde{V}'$ et $T \in \tilde{V}'$, est une sous-catégorie inductive faible de ${}^2\tilde{V}$.

3) Catégories de classe $\tilde{V}$:

Nous allons introduire maintenant une notion qui, bien que trop générale pour posséder beaucoup de propriétés, sera un outil important que nous raffinerons dans la suite.

Rappelons que si C est une catégorie, alors C est une espèce de structures au-dessus de $S \times S$, où S est un sous-groupe d'

de C tel que $S_0 = C_0$, relativement à la loi de composition:

$$h \longrightarrow f^{-1}.h.f' \quad , \quad \text{où } h \in C, \quad f \in S, \quad f' \in S.$$

Nous dirons que C est sous-jacente à une catégorie C' si l'es-
pèce de structures C au-dessus de $S \times S$ est sous-jacente à l'es-
pèce de structures C' au-dessus de $S' \times S'$, où S' est un sous-
groupeïde de C' tel que $S'_0 = C'_0$. En particulier, si C est une
catégorie inductive au-dessus de C' , alors C est sous-jacente
à C' relativement au foncteur projection p , l'application cova-
riante correspondante étant le couple $(p, (p/S) \times (p/S))$, où p/S
est la restriction de p à S .

Définition 1-2: On dit qu'une catégorie inductive C est de clas-
se $\tilde{V}$ relativement à F si C est sous-jacente à une sous-catégo-
rie $\tilde{V}'$ de $\tilde{V}$ relativement à un foncteur p de $\tilde{V}'$ vers C tel que
 $p(V'_0) = C_0$ et si F est un foncteur d'une sous-catégorie induc-
tive faible C' de C vers $\tilde{V}'$ tel que l'on ait, pour tout $h \in C'$,

$$p(F(h)) = h.$$

Exemples: Si p est un foncteur biunivoque de $\tilde{V}'$ vers C' , alors
 C' est de classe $\tilde{V}$ relativement au foncteur $\bar{p}^1$. Si F est un
foncteur de C vers $\tilde{V}$ compatible avec l'induction (c'est-à-dire
 $F(e) \leq F(E)$ si $e \leq E$ et $F(\bigcup e_i) = \bigcup F(e_i)$, où $e \in C_0$, $E \in C_0$
et $e_i \in C_0$), alors C est de classe $\tilde{V}$ relativement à F et C est
complètement régulière à droite.

Proposition 1-2: Si C est une catégorie de classe $\tilde{V}$ relativement
à un foncteur F de C' vers $\tilde{V}$, alors $F(C')$ est une catégorie in-
ductive au-dessus de C et peut être élargie en une catégorie

inductive $\tilde{C}$ étalée au-dessus de C , le foncteur projection étant biunivoque. Si de plus C' est une sous-catégorie régulière de C , alors $F(C')$ est suprarégulière au-dessus de C .

Cette proposition résulte des définitions. $\tilde{C}$ est la catégorie induite de C par la restriction de p à $F(C')$: un morphisme de $\tilde{C}$ est un triplet $(F(e'), h, F(e))$, où $h \in C$, $e = \alpha(h)$ et $e' = \beta(h)$; la loi d'induction est définie par:

$(F(e'_1), h_1, F(e_1)) < (F(e'), h, F(e))$ si et seulement si $h_1 < h$. Si $F(h)$ est défini, le triplet $(F(\beta(h)), h, F(\alpha(h)))$ sera identifié avec $F(h)$.

Dans le cas général, $F(C')$ n'est pas une sous-catégorie inductive faible de $\tilde{V}$ et les structures d'ordre induites sur $F(C')$ par $\tilde{C}$ et par $\tilde{V}$ ne coïncident pas.

Si C est une catégorie de classe $\tilde{V}$ relativement à F et si C' est complètement régulière à droite, alors la relation:

$$s < s' \quad \text{dans } F(C'), \quad \text{où } s \in \tilde{V}_0 \text{ et } s' \in \tilde{V}_0$$

signifie que l'on a: $p(s) < p(s')$ et $F(e'e)$ est une application linéaire continue de s dans s' , en posant: $e = p(s)$ et $e' = p(s')$.

4) Catégories inductives vectorielles topologiques:

La notion qui est à la base de tout ce que nous ferons est la suivante:

Définition 1-3: Soit C une catégorie inductive et H une catégorie inductive suprarégulière au-dessus de C . On dit que (H, F)

est une catégorie inductive vectorielle topologique, ou une $\tilde{V}$ -catégorie inductive sur $C' \subset C$ si les conditions suivantes sont vérifiées:

- 1) F est un foncteur d'une sous-catégorie inductive régulière faible C' de C vers $\tilde{V}$ telle que $C'_0 = p(H_0)$, où p est le foncteur projection de H vers C .
- 2) Pour tout $e \in C'_0$, les éléments de $F(e)$ sont les $s \in H_0$ tels $p(s) = e$.
- 3) Pour tout $f \in C'$ et tout $s \in H_0$ tels que $p(s) = \alpha(f)$, il existe $h \in H$ tel que: $p(h) = f$, $\alpha(h) = s$ et $\beta(h) = F(f)(s)$.
- 4) Soient $f \in C'$, $f' \in C'$ et $s \in F(\alpha(f))$; les relations: $f' < f$ et $\alpha(f) = \alpha(f')$ entraînent: $F(f')(s) < F(f)(s)$.

L'élément h dont l'existence est assurée par la condition 3 est unique puisque H est une catégorie inductive au-dessus de C . Mais il peut exister des éléments h' de H tels que l'on ait: $p(h') = f$ et $\alpha(h') = s$.

Les conditions 1, 2, 3 et 4 de la définition 1-3 sont équivalentes aux conditions suivantes:

- 1) Il existe une sous-catégorie H' de H telle que H' soit la catégorie des hypermorphisms correspondant à l'espèce de structures H_0 sur C' , c'est-à-dire: H' s'identifie à la catégorie des couples (f, s) , où $f \in C'$, $s \in H_0$ et $p(s) = \alpha(f)$.
- 2) Pour tout $e \in C'_0$, l'ensemble $\bar{p}^1(e)$ est muni d'une structure d'espace localement convexe.
- 3) Pour tout $f \in C'$, l'application: $\alpha(h) \longrightarrow \beta(h)$, où h appartient à $\bar{p}^1(f)$ et à H' , est une application linéaire continue

de $\bar{p}^1(\alpha(f))$ dans $\bar{p}^1(\beta(f))$.

4) Soient $h' \in H'$ et $h'' \in H'$ tels que $\alpha(h') = \alpha(h'')$; on a: $h' < h''$ si et seulement si $p(h') < p(h'')$.

Remarque: 1-1. On pourrait remplacer la condition 4 de la définition 1-3 par la condition plus forte:

4') Soient $h' \in H'$ et $h'' \in H'$; on a $h' < h''$ si et seulement si $p(h') < p(h'')$ et $\alpha(h') < \alpha(h'')$.

Toutefois, cette condition ne sera pas vérifiée dans les exemples les plus intéressants. Si C' est un groupoïde, la condition 4 n'existe plus (puisque $f' < f$ et $\alpha(f') = \alpha(f)$ entraînent $f = f'$); par contre la condition 4' signifie que H' est un groupoïde inductif au-dessus de C .

Proposition 1-3: Si (H, F) est une $\tilde{V}$ -catégorie inductive au-dessus de C , alors C est de classe $\tilde{V}$ relativement à F .

Soit (H, F) une $\tilde{V}$ -catégorie inductive au-dessus d'une catégorie C complètement régulière à droite. Puisque C' est une sous-catégorie inductive régulière de C , pour tout $e \in C'_0$ et tout $e' \in C'_0$ tels que $e < e'$, C' contient $e'e$. Par suite $F(e'e)$ est une application linéaire continue de $F(e)$ dans $F(e')$. Pour tout $s \in F(e)$, on a: $s < s' = F(e'e)(s)$.

Proposition 1-4: Soit (H, F) une $\tilde{V}$ -catégorie inductive sur $C' \subset C$. Si C est complètement régulière à droite, pour tout $e \in C'_0$ et tout $e' \in C'_0$ tels que $e < e'$, l'application $F(e'e)$ est une injection. De plus la condition 4 de la définition 1-3 est équivalente à la suivante:

Pour tout $s \in F(e)$, où $e \in C'_0$, on a: $s < F(e'e)(s)$, où $e < e'$.

Proposition 1-5: Soit (H, F) une $\tilde{V}$ -catégorie inductive sur $C' \subset C$. Si C est complètement régulière à gauche, la condition 4 de la définition 1-3 signifie que H_0 est une espèce de structures inductives étalée au-dessus de C' .

En effet, l'application $F(ee')$, où $e < e'$, applique s' sur s tel que $p(s') = e'$, $p(s) = e$ et $s < s'$.

Pour simplifier le texte, nous nous limiterons souvent à la situation suivante:

Définition 1-4: On dit que H_0 ou que (H, F) est une espèce de structures inductives vectorielle topologique, ou une $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives sur $C' \subset C$ si (H, F) est une $\tilde{V}$ -catégorie inductive sur $C' \subset C$ et si tout élément h de H est tel que l'on ait: $p(h) \in C'$ et $\beta(h) = F(p(h))(\alpha(h))$. Si pour tout $e \in C'_0$ la topologie de $F(e)$ est la topologie fine, on dit que H_0 est une espèce de structures inductives vectorielle.

Cette définition signifie que la sous-catégorie H' de H que nous avons considérée plus haut est identique à H .

Théorème 1-2: Soient C une catégorie inductive complètement régulière à droite (resp. à gauche) et (H, F) une $\tilde{V}$ -catégorie inductive sur $C' \subset C$. Si C' est normale à gauche (resp. à droite) il existe une $\tilde{V}$ -catégorie inductive $(K, T(F))$ sur la catégorie inductive $T(C')$ des paratopologies de C' . (Voir [9c]).

En effet, supposons C complètement régulière à droite. Le

foncteur $T(F)$ est défini comme suit:

$T(F)(t, E, t)$, où t est une paratopologie sur $E \in C'_0$, est l'espace localement convexe limite inductive des espaces localement convexes $F(e)$, où $e \in t$, relativement aux applications $F(e'e)$, où $e' \in t$ et $e < e'$. Pour tout $f \in C'$ et tout $(t', f, t) \in T(C')$, $T(F)(t', f, t)$ est l'application de $T(F)(t, \alpha(f), t)$ dans $T(F)(t', \beta(f), t')$ déduite canoniquement des applications $T(e'fe)$, où $e \in t$ et $e' \in t$.

Un élément k de K s'identifie à une classe de restrictions s'hs de $h \in H$, où $p(s)$ et $p(s')$ décrivent des paratopologies t et t' sur $\alpha(p(h))$ et sur $\beta(p(h))$ resp., les éléments s et s' définissant resp. la même classe d'équivalence.

La loi d'induction est définie par:

$s < s'$, où $s \in K_0$ et $s' \in K_0$, si et seulement si $s \in T(F)(t, E, t)$,

$s' \in T(F)(t', E', t')$, $(t, E, t) < (t', E', t')$ et:

$$s' = T(F)[(t', E', t')(t, E, t)](s)$$

$k < k'$ si et seulement si $p(h) < p(h')$, $\alpha(k) < \alpha(k')$, $\beta(k) < \beta(k')$,

où h et h' sont les éléments de H intervenant dans la définition de k et k' .

Si C est complètement régulière à gauche, on définit dualement $T(F)(t, E, t)$ comme l'espace localement convexe limite projective des espaces localement convexes $F(e)$, où $e \in t$, relativement aux applications $F(ee')$, où $e' \in t$ et $e < e'$.

Définition 1-5: Soit (H, F) une $\tilde{V}$ -catégorie inductive sur $C' \subset C$.

On dit que (H_1, F_1) est une sous-catégorie vectorielle topolo-

gique de (H, F) si (H_1, F_1) est une $\tilde{V}$ -catégorie inductive sur une

sous-catégorie inductive régulière faible C'' de C' vérifiant les conditions suivantes:

- 1) H_1 est une sous-catégorie inductive faible de H .
- 2) Pour tout $f \in C''$, on a $F_1(f) < F(f)$ dans $\tilde{V}$.

Il résulte de cette définition que l'espèce de structures $(H_1)_0$ sur C'' est une sous-espèce de structures de H_0 sur C' . De plus, pour tout $e \in C''_0$, l'espace $F_1(e)$ est un sous-espace vectoriel de $F(e)$ muni d'une topologie plus fine que la topologie induite par $F(e)$ et le triplet (F, j, F_1) , où $j(e)$ est l'injection canonique de $F_1(e)$ dans $F(e)$ est une transformation naturelle de F_1 vers la restriction de F à C'' .

Proposition 1-6: Soit (H, F) une $\tilde{V}$ -catégorie inductive sur $C' \subset C$. Soit H_1 une sous-catégorie inductive régulière faible de H dont la trace sur H' soit une sous-catégorie pleine de H' . Si, pour tout $e \in C'_0$, $F_1(e) = F(e) \cap H_1$ est un sous-espace vectoriel de $F(e)$ muni de la topologie induite par celle de $F(e)$, alors (H_1, F_1) est une sous-catégorie vectorielle topologique de (H, F) , l'application $F_1(f)$ étant la restriction de $F(f)$ à $F_1(e)$, où $f \in C'$ et $e = \alpha(f)$.

Si dans la définition 1-5 on remplace la condition 2 par:
 2') Pour tout $e \in C''_0$, $F_1(e)$ est un sous-espace vectoriel de $F(e)$ et, pour tout $f \in C''$, $F_1(f)$ est la restriction de $F(f)$.
 alors on dira que (H_1, F_1) est une sous-catégorie vectorielle de (H, F) .

Théorème 1-3: Soit (H, F) une $\tilde{V}$ -catégorie inductive sur $C' \subset C$. Supposons C complètement régulière à droite (resp. à gauche) et C' normale à gauche (resp. à droite). Soit (H_1, F_1) une sous-catégorie vectorielle topologique de (H, F) . Alors $(K_1, T(F_1))$ est une sous-catégorie vectorielle topologique de $(K, T(F))$. (Voir théorème 1-2 pour les notations).

4) Catégories de catégories d'opérateurs:

Soit C une catégorie inductive régulière. Soit G une espèce de structures au-dessus de C et q le foncteur projection de G sur une sous-catégorie inductive faiblement régulière C' de C . Supposons les conditions suivantes vérifiées:

- 1) Pour tout $e \in C'_0$, la classe $\bar{q}^1(e)$ est munie d'une structure de catégorie.
- 2) Pour tout $f \in C'$, l'application $\bar{f}: u \longrightarrow f.u$, où $f.u$ est le composé de f et $u \in G$, $q(u) = \alpha(f)$, est un foncteur de $\bar{q}^1(\alpha(f))$ vers $\bar{q}^1(\beta(f))$.

Nous dirons alors que G est une catégorie de catégories sur $C' \subset C$. Nous noterons par $\bar{q}^1$ le foncteur: $f \longrightarrow \bar{f}$ de C' vers la catégorie des foncteurs d'une catégorie dans une autre.

Soit (H, F) une $\tilde{V}$ -catégorie inductive sur $C' \subset C$ telle que:

- 3) Pour tout $e \in C'_0$, la catégorie $\bar{q}^1(e)$ est une catégorie d'opérateurs linéaires sur $F(e)$. Le composé de $u \in \bar{q}^1(e)$ avec $s \in F(e)$ sera noté $u.s$
- 4) Pour tout $f \in C'$, on a la relation:

$$F(f)(u.s) = \bar{f}(u).F(f)(s), \quad \text{où } q(u) = p(s) = \alpha(f).$$

Définition 1-6: Avec les notations précédentes, on dira que G est une catégorie de catégories d'opérateurs sur (H, F) .

La condition 4 signifie que, pour tout $f \in C'$, le couple $(F(f), \bar{f})$ est une application covariante de l'espèce de structures $\bar{F}(e)$ sur $\bar{q}^1(e)$ vers l'espèce de structures $F(e')$ sur $\bar{q}^1(f')$, où $e = \alpha(f)$ et $e' = \beta(f)$.

Si G est une catégorie de catégories d'opérateurs sur (H, F) , l'application qui associe à $f \in C'$ l'application covariante $(F(f), \bar{f})$ est un foncteur de C' vers la catégorie des applications covariantes d'une espèce de structures vers une autre.

Si dans la définition 1-6 on suppose de plus que l'espèce de structures G est inductive au-dessus de C , on dira que G est une catégorie inductive de catégories d'opérateurs sur (H, F) .

Dualement, on définit une catégorie contravariante de catégories d'opérateurs sur (H, F) en supposant que G est une catégorie de catégories sur $C'^* \subset C^*$, où C'^* et C^* sont les catégories duales de C et C' et en remplaçant la condition 4 par:

4') Pour tout $f \in C'$, on a la relation: Pour tout $s \in F(\alpha(f))$,

$$u'.F(f)(s) = F(f)(\bar{f}^*(u').s), \quad \text{où } q(u') = \beta(f) \quad .$$

Théorème 1-4: Soient (H, F) et $(G, \bar{q}^1)$ deux $\bar{V}$ -catégories inductives sur $C' \subset C$, où C est complètement régulière à droite et C' normale à gauche. Si G est une catégorie inductive de catégories d'opérateurs sur (H, F) , alors $(G', T(\bar{q}^1))$ est une catégorie inductive de catégories d'opérateurs sur $(K, T(F))$.

Les notations sont celles du théorème 1-2. Soit $\bar{u}$ un élément de $T(\bar{q}^1)(t, E, t)$ et $\bar{s} \in T(F)(t, E, t)$; alors le composé $\bar{u} \cdot \bar{s}$ est la classe $\bar{s}' \in T(F)(t, E, t)$ telle que $s' = u \cdot s$, où u , s et s' sont des éléments des classes $\bar{u}$, $\bar{s}$ et $\bar{s}'$ resp.

Un cas intéressant est celui où pour tout $e \in C'_0$ la catégorie $\bar{q}^1(e)$ est un groupe d'opérateurs linéaires sur $F(e)$ et où le foncteur $\bar{f}$ est le foncteur identité de G sur G . Ce cas généralise directement la notion d'espace fibré à groupe structural.

5) $\tilde{V}$ -catégories inductives particulières:

1-1. Soit C une catégorie inductive telle que:

- 1) Une unité est un espace localement convexe.
- 2) Un morphisme h est une application de sa source dans son but et la relation: $h' < h$ entraîne que h' est une restriction de h .
- 3) Les morphismes de la sous-catégorie inductive faible régulière engendrée par C_0 sont des applications linéaires continues de leur source dans leur but.

Alors on obtient une $\tilde{V}$ -catégorie inductive de la façon suivante: Un élément de H est un couple (h, x) , où $h \in C$ et x est un point de $\alpha(h)$. La loi de composition est:

$$(h', x') \cdot (h, x) = (h' \cdot h, x) \quad \text{si et seulement si } h' \cdot h \text{ est défini} \\ \text{et } x' = h(x).$$

H est une catégorie inductive pour la loi d'induction:

$$(h', x') < (h, x) \quad \text{si et seulement si } h' < h \text{ et } x = x'.$$

Le foncteur $p: (h, x) \longrightarrow h$ étale H sur C . De plus (H, F) est une $\tilde{V}$ -catégorie inductive au-dessus de C , F désignant le fonc-

teur de C' vers $\tilde{V}$ tel que, pour tout $e \in C_0$, $F(e)$ s'identifie à e et pour tout $f \in C'$, $F(f)$ est l'application:

$$(\alpha(f), x) \longrightarrow (\beta(f), f(x))$$

de $F(e)$ dans $F(e')$, où $e = \alpha(f)$ et $e' = \beta(f)$, qui s'identifie à f .

Une catégorie C ayant les propriétés 1, 2, 3, ci-dessus sera appelée catégorie de classe $\tilde{V}$; c'est une catégorie de classe $\tilde{V}$ relativement au foncteur identité.

1-2. Soit S_0 une espèce de structures inductives au-dessus d'un groupeïde inductif G . Soit S la catégorie des hypermorphismes correspondante, un élément de S étant désigné par le couple (f, s) , où $f \in G$, $s \in S_0$ et $p(s) = \alpha(f)$, p étant le foncteur projection de S vers G . Supposons les propriétés 1, 2, 3 (resp. 1, 2, 3') suivantes satisfaites:

1) Pour tout $e \in p(S_0)$, $\bar{p}^1(e)$ est un ensemble muni d'une structure d'espace localement convexe.

2) Pour tout $f \in p(S)$ l'application: $s \longrightarrow \beta(f, s)$ est un isomorphisme $\bar{f}$ de $\bar{p}^1(e)$ sur $\bar{p}^1(e')$, où $e = \alpha(f)$ et $e' = \beta(f)$.

3) S_0 est étalée au-dessus de C et, pour tout couple (e, e') , où e et $e' \in p(S_0)$ et $e < e'$, l'application $\overline{ee'} : s' \longrightarrow s$, où $s < s'$, est une application linéaire continue de $\bar{p}^1(e')$ dans $\bar{p}^1(e)$.

3') Pour tout couple (e, e') , où $e \in p(S_0)$, $e' \in p(S_0)$ et $e' < e$, il existe une application linéaire continue $\overline{ee'}$ de $\bar{p}^1(e)$ dans $\bar{p}^1(e')$ telle que, pour tout $s' \in \bar{p}^1(e')$, on ait: $s' < \overline{ee'}(s')$.

Désignons par C' la catégorie inductive engendrée par G

et la classe des couples (e, e') , où $e \in p(S_0)$, $e' \in p(S_0)$ et $e < e'$ (resp. $e' < e$), considérés comme morphismes de e' vers e , dans laquelle on a: $e < (e, e') < e'$ (resp. $e' < (e, e') < e$). Soit de même S' la catégorie inductive engendrée par S et les couples (s, s') , où $s \in S_0$, $s' \in S_0$ et $s < s'$ (resp. et $s = \overline{ee'}(s')$, où $e = p(s)$ et $e' = p(s')$), considérés comme morphismes de e' vers e .

Proposition 1-7: Avec les notations précédentes, (S', F) est une espèce de structures inductives vectorielle topologique sur C' , F désignant le foncteur tel que:

$$F(f) = \overline{f} \quad \text{si} \quad f \in G \quad \text{et} \quad F(e, e') = \overline{ee'}.$$

Par abus de langage, nous dirons encore que S est une $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives au-dessus de G .

1-3. Soit (S, F) une $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives sur $C' \subset C$, où C est une catégorie complètement régulière à gauche (resp. à droite). Soit I un ensemble; pour tout $i \in I$, soit $e_i \in C'_0$ (resp. $e_i < E$, où $E \in C'_0$). Posons $a_i = F(e_i)$ et $a = F(\bigcap_{i \in I} e_i)$ (resp. $a = F(\bigcup_{i \in I} e_i)$). L'application $j_i = F((\bigcap_{i \in I} e_i) e_i)$ (resp. $j_i = F((\bigcup_{i \in I} e_i) e_i)$)

est une application linéaire continue de a_i dans a et la somme topologique localement convexe $\sum_{i \in I} j_i(a_i)$ est induite par a dans $\tilde{V}$. Nous dirons que (S, F) est contravariante (resp. covariante) si on a: $a = \sum_{i \in I} j_i(a_i)$.

1-4. Soit C une catégorie inductive; la classe C forme une espèce de structures inductives étalée au-dessus de $C \times C$, le foncteur projection étant: $h \longrightarrow (\beta(h), \alpha(h))$. Nous désignerons

par $(E' \leftarrow E)$ la classe des morphismes de source E et de but E' .

Définition 1-7: On appelle catégorie vectorielle topologique abstraite une catégorie inductive régulière C telle que C soit une $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives au-dessus de $C \times C$ et que: Pour tout e, e' et $e'' \in C_0$, l'application:

$$(h, h') \longrightarrow h' \cdot h \quad \text{où } e = \alpha(h), \quad e' = \beta(h) = \alpha(h'), \\ e'' = \beta(h'), \text{ est une application bilinéaire continue de}$$

$$(e'' \leftarrow e') \times (e' \leftarrow e) \quad \text{dans} \quad (e'' \leftarrow e).$$

Ainsi dans une catégorie vectorielle topologique abstraite, $(e' \leftarrow e)$ est muni d'une structure d'espace localement convexe. Supposons que la sous-catégorie inductive C' de $C \times C$, sur laquelle le foncteur F , tel que (C, F) soit une $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives, est défini, soit la sous-catégorie régulière engendrée par $C_0 \times C_0$ et que C soit complètement régulière. Alors, si $e \in E$, $e' \in E'$, $\beta(Ee) = E$ et $\beta(E'e') = E'$, où e, e', E et E' sont des éléments de C_0 , il existe une application linéaire continue a de $(e' \leftarrow e)$ dans $(E' \leftarrow E)$. Si $\alpha(eE) = E$ et $\alpha(e'E') = E'$, il existe une application linéaire continue a' de $(E' \leftarrow E)$ dans $(e' \leftarrow e)$; cette application a' sera le plus souvent l'application: $h \longrightarrow e' h e$.

Une catégorie vectorielle topologique abstraite vérifie l'axiome KA_1 pour une catégorie abélienne (voir [10]), mais non l'axiome KA_2 en général. On peut montrer que cet axiome KA_2 permet de munir toute catégorie abélienne d'une structure de catégorie inductive complètement régulière. Inversement, les o-

pérations faites sur les catégories abéliennes n'utilisent généralement que la propriété de complète régularité de ces catégories et par suite peuvent s'étendre aux catégories vectorielles topologiques abstraites qui sont complètement régulières. Pour ces questions nous renvoyons à [3].

Remarque:1-2. Soit S une $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives sur $C' \subset C$; on peut lui associer une catégorie vectorielle topologique abstraite S' dont les éléments sont ceux de C'_0 et de S , une structure $s \in S$ étant considérée comme un morphisme de e vers e , où $e = p(s)$; le composé de s et s' est défini si $p(s) = p(s')$ et égal à $s + s'$; le 0 de l'espace vectoriel sur $\bar{p}^1(e)$ est identifié avec e .

1-3. Une catégorie complètement régulière de classe $\tilde{V}$ telle que $(E' \leftarrow E)$, où $E \in C_0$, $E' \in C_0$, soit un ensemble, peut être élargie en une catégorie vectorielle topologique abstraite $\bar{C}$: Les morphismes de source E et de but E' de $\bar{C}$ seront les combinaisons linéaires formelles d'applications appartenant à $(E' \leftarrow E)$ et cet ensemble sera muni d'une topologie compatible avec la structure vectorielle, par exemple la topologie fine.

6) Propriétés des $\tilde{V}$ -espèces de structures inductives:

Les résultats suivants se transposent au cas des $\tilde{V}$ -catégories inductives; c'est pour simplifier ce texte que nous les énonçons dans un cas particulier.

Théorème 1-5: Soit (S, F) une $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives sur $C' \subset C$, où C est complètement régulière à gauche. Alors (S, F)

est une sous-espèce vectorielle topologique d'une $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives $(\bar{S}, \bar{F})$ au-dessus de C , où $\bar{S}$ est la complé-
tion de S au-dessus de C . (Voir [9d]).

En effet, l'espace $\bar{F}(E)$, où $E \in C'_0$, est l'espace localement convexe limite projective des espaces localement convexes $F(e)$ où $e \leq E$, $e \in C'_0$, $e \neq E$, relativement aux applications $F(e'e)$, où $e' \leq e$ et $e' \in C'_0$.

Théorème 1-6: Si C est complètement régulière à gauche et si (S, F) est une $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives sur $C' \subset C$, alors $(J(S, C), J(F))$ est une $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives au-dessus de C dont (S, F) est une sous-espèce vectorielle topologique, $J(S, C)$ étant la catégorie des jets locaux de S au-dessus de C .

En effet, l'espace $J(F)(e)$, où $e \in C'_0$, s'identifie à l'espace localement convexe limite inductive des espaces localement convexes $F(e')$, où $e \leq e'$, relativement aux applications $F(e'e'')$, où $e' \leq e''$, $e' \in C'_0$ et $e'' \in C'_0$.

Soit (S, F) une $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives sur une sous-catégorie inductive régulière C' de C et soit C'' une sous-catégorie régulière de C . Supposons C complètement régulière à droite (resp. à gauche). Pour tout $E \in C''_0$, désignons par $F'(E)$ l'espace localement convexe limite inductive (resp. limite projective) des espaces localement convexes $F(e)$, où $e \leq E$, $e \in C'_0$, relativement aux applications $F(e'e)$, où $e \leq e' \leq E$ (resp. où $e' \leq e$, $e' \leq E$). Soit S'_0 la classe des éléments des espaces $F'(E)$. Par passage aux limites, l'application F' s'étend en un

foncteur F' d'une sous-catégorie C'_1 de C'' contenant en particulier les éléments EE' (resp. $E'E$), où $E \in C''_0$, $E' \in C''_0$ et $E' < E$, et les éléments f'' tels que $f''e$ (resp. ef'') appartienne à C' pour tout $e \in C'_0$ et $e < \alpha(f'')$ (resp. $e < \beta(f'')$); nous supposons que C'_1 contient la sous-catégorie inductive régulière faible engendrée par C''_0 (cette condition ne serait pas indispensable). Soit S' la catégorie des couples $(f'', \bar{s})$, où $f'' \in C'_1$ et $\bar{s} \in S'_0$ tels que $\bar{s} \in F'(\alpha(f''))$; si $f'' \in C'$, ce couple sera identifié à $(f'', s) \in S$, où $s \in \bar{s}$.

Théorème 1-7: Avec les notations précédentes, (S', F') est une $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives sur $C'_1 \subset C''$. Si de plus S est étalée au-dessus de C , alors (S', F') est covariante (resp. contravariante).

Soit (S, F) une $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives sur $C' \subset C$, où C' est complètement régulière à gauche. Pour tout $e \in C'_0$, soit $F'(e)$ l'espace quotient de $F(e)$ par la relation d'équivalence:

$s \sim s'$ si et seulement si il existe s_1 tel que $s_1 < s$ et $s_1 < s'$.

Soit S' la classe dont les éléments sont les éléments des espaces $F'(e)$.

Théorème 1-8: Avec les notations précédentes, (S', F') est une $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives au-dessus de C .

2- EXEMPLES ET CONSTRUCTIONS DE $\tilde{V}$ -CATEGORIES INDUCTIVES

2-1. Soit C_0 la classe des ouverts relativement compacts d'une variété V de dimension finie. Soit C la catégorie dont C_0 est

la classe des objets et dont les morphismes sont les injections canoniques UU' de U' dans U , où $U' \subset U$, $U' \in C_0$ et $U \in C_0$. Alors C est une catégorie inductive pour la relation d'ordre:

$$U' < U \text{ si et seulement si } U' \subset U,$$

$$UU' < U_1 U'_1 \text{ si et seulement si } UU' \text{ est la restriction de } U_1 U'_1.$$

C est complètement régulière à droite.

Soit H la classe des éléments h définis de la façon suivante: h est une fonction numérique continue définie sur $U \in C_0$ et à support compact. H est une espèce de structures inductives au-dessus de C pour la relation d'ordre:

$$h' < h \text{ si et seulement si } h' \text{ est une restriction de } h,$$

la projection p étant l'application: $h \longrightarrow U$, où h est définie sur U .

Pour tout $U \in C_0$, désignons par $F(U)$ l'espace, dont les éléments sont ceux de $\bar{p}^1(U)$, muni de la structure vectorielle définie par R et de la topologie de la convergence uniforme. Si $U' \in C_0$ et $U' < U$, soit $F(UU')$ l'application:

$$h' \longrightarrow h, \text{ où } h \in H_0, h' \in H_0, p(h)=U, p(h')=U', (\text{support de } h') = (\text{support de } h).$$

F est un foncteur de C vers $\tilde{V}$ et (H, F) est une $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives sur C .

Dans cet exemple, on peut supposer V indéfiniment différentiable et remplacer fonction continue par fonction indéfiniment différentiable. Dans ce dernier cas, on obtient une autre $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives en munissant $\bar{p}^1(U)$ de la même

structure vectorielle que plus haut et de la topologie de la convergence uniforme pour les fonctions et toutes leurs dérivées partielles.

2-2. Soit E un espace topologique et C la catégorie inductive dont les objets sont les ouverts de E et les morphismes les applications continues d'un ouvert sur un autre, munie de la loi de composition entre fonctions et de la loi d'induction:

$f' < f$ si et seulement si f' est une restriction de f .

Soit C' la sous-catégorie inductive de C dont les morphismes sont les surjections canoniques $U' \rightarrow U$ de U sur $U' \subset U$. Alors C' est une catégorie complètement régulière à gauche.

Dire que C est de classe $\tilde{V}$ relativement à F , où F est un foncteur défini sur C' , signifie que F est un préfaisceau à valeurs dans la catégorie $\tilde{V}$ (voir [10]).

Si F est un faisceau, la catégorie $\tilde{C}$ définie dans la proposition 1-2 est une catégorie complète relativement à C . Soit alors S_0 la classe dont les éléments sont les sections du faisceau F au-dessus de $U \in C_0$, munie de la relation:

$s' < s$ si et seulement si s' est une restriction de s .

S_0 est une espèce de structures inductives complète au-dessus de C pour la projection p qui associe à s l'ouvert sur lequel s est défini. Désignons encore par $F(U)$ l'espace vectoriel des sections au-dessus de U , muni de la topologie fine et par $F(U' \rightarrow U)$ l'application qui associe à $s \in F(U)$ la restriction de s à U' .

Avec les hypothèses précédentes (S_0, F) est une $\tilde{V}$ -espèce

de structures inductives sur C' .

Inversement, soit (S, F) une $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives au-dessus de C , l'espèce de structures S étant complète relativement à C . Soit C_1 la sous-catégorie de $\tilde{E}$ formée par toutes les applications d'une partie de E dans une partie de E ; alors C' est une sous-catégorie inductive régulière de C et (S, F) peut être considéré comme une $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives au-dessus de C_1 . Soit $(J(S, C_1), J(F))$ la $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives construite au-dessus de C_1 au théorème 1-6. La sous-classe de $J(S, C_1)$ formée des jets atomiques est un faisceau d'ensembles au-dessus de E , la fibre sur $x \in E$ étant l'espace limite inductive des espaces $F(U)$, où U décrit les ouverts de E contenant x . Les fibres sont ainsi munies de plus de topologies localement convexes.

2-3. Soit C_0^r la classe des couples (U, G) , où U est un ouvert d'une E -variété $(\S 9)$ r fois différentiable sur E et G sont des espaces localement convexes, munie de la relation:

$(U, G) < (U', G')$ si et seulement si $U \subset U'$ et $G' \subset G$ dans $\tilde{V}$.

Soit C^r la catégorie inductive obtenue en adjoignant à C_0^r les couples $(U'U, GG')$, tels que $(U', G') < (U, G)$, considérés comme morphismes de (U, G) vers (U', G') , la loi d'induction étant:

$$(U_1 U_1, G_1 G_1') < (U'U, GG') \text{ si et seulement si } (U_1, G_1) < (U, G) \\ \text{et } (U_1', G_1') < (U', G').$$

Soit S^r la classe dont les éléments sont les applications s de U dans G , qui sont r fois différentiables sur U , où

$(U, G) \in C_0^r$. La catégorie C^r opère sur S^r , le composé de $s \in D^r(U, G)$ (notation du chapitre III) avec $(U'U, GG')$ étant la restriction de s à U' considérée comme application dans G' . Si $D_C^r(U, G)$ désigne l'espace localement convexe $D^r(U, G)$ muni de la topologie définie au chapitre III, alors (S^r, D_C^r) est une $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives complète et étalée sur C^r .

Pour tout entier r , la catégorie C^r contient la catégorie C^{r+1} ; soit C la catégorie intersection des catégories C^r . La construction du théorème 1-7 mène à la $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives (S, D_C) au-dessus de C telle que $D_C(U, G)$ soit l'espace topologique des applications indéfiniment différentiables sur U , à valeurs dans G , la topologie étant celle de la c - c convergence (Chapitre II). On dira que (S, D_C) est la $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives limite projective des $\tilde{V}$ -espèces de structures inductives (S^r, C^r) . (Voir paragraphe 3).

2-4. Soit B une E -variété indéfiniment différentiable définie par un atlas complet A de l'espace localement convexe E dans B (voir chapitre III). Soit C_0 un sous-ensemble d'ouverts de B vérifiant les conditions suivantes:

- 1) Tout point de B appartient à un $U \in C_0$ au moins.
- 2) Tout $U \in C_0$ est le but d'une carte locale de A .
- 3) Pour l'ordre défini par l'inclusion, C_0 est une classe inductive.

Soit C la catégorie inductive complètement régulière à gauche obtenue en adjoignant à C_0 les surjections canoniques

$U'U$ de $U \in C_0$ sur $U' \in C_0$, $U' \subset U$. L'ordre est défini par restriction.

Soit M un espace fibré à groupe structural topologique ou hypotopologique (Chapitre III) de base B , dont la fibre P est un espace localement convexe, défini par un atlas complet A' de $B \times P$ dans M tel que les changements de cartes soient indéfiniment différentiables. Soit S la classe dont les éléments sont les sections indéfiniment différentiables de M au-dessus de $U \in C_0$, munie de la relation d'ordre:

$s' < s$ si et seulement si s' est la restriction de s à $U' \subset U$.

Soit F le foncteur de C vers $\tilde{V}$ défini comme suit:

Pour tout $U \in C_0$, $F(U)$ est l'ensemble des sections $s \in S_0$ définies sur U , muni de la structure vectorielle définie à partir de celle de P et de la topologie de la convergence compacte; un système fondamental de voisinages de 0 est formé des ensembles $W(K, V)$, où K est un compact de B contenu dans U et V un voisinage de la section identiquement nulle dans l'espace fibré M , dont les éléments sont les sections $s \in F(U)$ telles que $s(K) \subset V$.

Pour tout $U'U \in C$, $F(U'U)$ est l'application qui associe à $s \in F(U)$ sa restriction à U' .

Alors, (S, F) est une $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives étalée sur C .

Pour tout $U \in C_0$, soit $\bar{q}^1(U)$ l'ensemble d'opérateurs sur $F(U)$ obtenu de la manière suivante:

Soit g une carte de A de source W et de but contenu dans U et soit h une carte locale de A' de source $W \times F$. Soit a un

changement de crtes dans A, de source W et de but W'. Soit $(v_1, \dots, v_p)$ un p-uple dans E. Désignons par $d(v_i, p, a)$ l'opérateur qui associe à $s \in F(U)$ l'application:

$$x \longrightarrow (x, (\bigotimes_{v_1 \dots v_p}^p m \bar{a}^1) \circ a(x)),$$

où $x \in W$, $m(x) \in P$ et $(x, m(x)) = h^{-1} s g(x)$. Soit $\bar{q}^1(U)$ la catégorie dont les éléments sont les combinaisons linéaires d'opérateurs u de la forme:

$$s \longrightarrow h d(v_i, p, a) \bar{g}^1$$

où v, p et a varient. L'ensemble $\bar{q}^1(U)$ ne dépend pas des cartes choisies h et g.

Soit $\bar{q}^1(U'U)$ le foncteur de $\bar{q}^1(U)$ vers $\bar{q}^1(U')$ qui associe à u l'opérateur: $s' \longrightarrow h d(v_i, p, a) (g/U')^{-1}$, où $(g/U')^{-1}$ désigne la restriction de $\bar{g}^1$ à U' .

La classe G des couples $(U'U, u)$, où $u \in \bar{q}^1(U)$ et $U'U \in C$, est une catégorie de catégories d'opérateurs sur (S, F) .

2-5. Soit E un ensemble et C_0 un ensemble de parties de E qui contienne avec un ensemble A toutes ses parties et, avec une suite d'ensembles de E leur intersection dans E. Soit C la catégorie inductive obtenue en adjoignant à C_0 les surjections canoniques $A'A$, où $A' \in C_0$, $A \in C_0$ et $A' \subset A$, la loi d'induction étant définie par:

$$A' < A \text{ si et seulement si } A' \subset A;$$

$$A'A < A'_1 A_1 \text{ si et seulement si } A'A \text{ est une restriction de } A'_1 A_1.$$

Soit (S, F) une $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives sur C,

dont les structures $s \in F(A)$ sont des applications numériques définies sur A , la relation d'ordre étant:

$f' < f$ si et seulement si f' est une restriction de f ;

de plus $F(A)$ est muni de la topologie de la convergence simple.

Le procédé utilisé dans le théorème 1-8 associe à (S, F) une $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives (S', F') .

S est une classe fonctionnelle normée au sens d'Aronszajn (voir [1]) relativement à la classe exceptionnelle dont les éléments sont les complémentaires des éléments de C_0 , si on a une application: $f \longrightarrow \|f\|$ de S dans R^+ (droite réelle positive) vérifiant les propriétés suivantes:

- 1) La restriction de l'application: $f \longrightarrow \|f\|$ à $F(A)$ définit sur $F(A)$ une semi-norme, pour tout $A \in C_0$. (Non continue).
- 2) Pour tout $A \in C_0$, il y a correspondance biunivoque entre $F'(A)$ et l'espace normé(séparé) $\|A\|$ associé à l'espace $F(A)$ lorsqu'on munit ce dernier de la topologie définie par la semi-norme.

Alors, l'application $F(A'A): s \longrightarrow s'$, où $s' < s$, $s' \in F(A')$, conserve la semi-norme.

S est un espace fonctionnel au sens d'Aronszajn si de plus:

- 3) Pour tout $A \in C_0$, l'injection canonique de $\|A\|$ sur $F'(A)$ est continue.

Ainsi la donnée d'un espace fonctionnel est équivalente à celle d'un foncteur F'' tel que (S, F'') soit une $\tilde{V}$ -espèce de

structures inductives sur C et que $F''(A)$ soit normé pour tout $A \in C_0$.

S'admet une complétion fonctionnelle au sens d'Aronszajn si en remplaçant $F''(A)$ par son complété (topologique), on trouve un espace fonctionnel. Le théorème d'Aronszajn (page 143 [1]) se déduit facilement du fait que la condition 3 équivaut à dire que tout borné de $\|A\|$ est borné dans $F'(A)$ puisque $\|A\|$ est bornologique. Nous verrons au paragraphe 4 une généralisation de ce problème et sa solution.

2-6. Soient C une sous-catégorie inductive de $\tilde{E}$ et C_1 une sous-catégorie inductive de la catégorie dont les éléments sont les applications d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel sur un espace vectoriel, la loi de composition étant celle entre applications et la loi d'induction, la restriction. Soit A un foncteur contravariant de C vers C_1 . Soit (S, F) une $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives sur $C' \subset C$ telle que les éléments de $F(E)$, où $E \in C'_0$, soient des applications s de E dans $A(E)$ et que l'on ait:

$$A(f)(F(f)(s)(F(x))) = s(x) \quad \text{pour tout } x \in \alpha(f) \text{ et } s \in F(\alpha(f)).$$

Dans ce cadre rentrent l'exemple 2-1 ainsi que le suivant où les objets de C_1 sont des espaces localement convexes.

Soit C la catégorie inductive de l'exemple 2-1 et A un foncteur contravariant de C vers une catégorie C_1 comme ci-dessus. Pour tout $U \in C_0$, $F(U)$ est l'ensemble des applications indéfiniment différentiables de U dans $A(U)$, à support compact,

muni de la structure vectorielle définie par $A(U)$ et de la topologie de la convergence compacte dans les applications et toutes leurs dérivées partielles. Pour tout $U'U \in C$, l'application $F(U'U)$ fait correspondre à $s' \in F(U)$ l'application s de même support et telle que, pour tout $x \in U$, on ait:

$$s'(x) = A(U'U)(s(x)).$$

On suppose ici que $A(U'U)$ est une application linéaire continue biunivoque d'un sous-espace vectoriel de $A(U)$ sur $A(U')$.

On obtient un autre exemple en remplaçant dans l'exemple 2-1 les fonctions indéfiniment différentiables par des formes dont les coefficients dans un système de coordonnées locales sont indéfiniment différentiables et à support compact.

2-7. Soient C une sous-catégorie inductive de la catégorie $\bar{E}$ dont les éléments sont les applications d'une partie d'un ensemble sur un ensemble et C_1 une sous-catégorie inductive de $\tilde{E}$. Soit (S, F) une $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives au-dessus de C de la forme suivante:

Soit A un foncteur de C vers C_1 ; pour tout $e \in C'_0$, $F(e)$ est un ensemble d'applications s de e dans $F(e)$ muni d'une structure vectorielle topologique; de plus, pour tout $f \in C'$, on a:

$$(F(f)(s(x))) = A(f)(s(x)), \quad \text{où } x \in \chi(f) \text{ et } s \in F(\chi(f)).$$

Dans ce cadre rentrent les exemples 2-3 et 2-4.

3- HOMOMORPHISMES

1) Homomorphismes de catégories de classe $\tilde{V}$:

Soient C et C_1 deux catégories inductives régulières de classe $\tilde{V}$ relativement aux foncteurs F et F_1 resp. définis sur les sous-catégories inductives C' et C'_1 resp.

Définition 3-1: On appelle homomorphisme de (C, F) vers (C_1, F_1) un couple (A, g) , où A est un foncteur contravariant de C' vers C'_1 tel que, si $h < h'$, on a $A(h) < A(h')$ et que, si $h_1 < h$, on a: $A(\bigcup h_i) = \bigcap A(h_i)$, et g est une application de C'_0 dans $\tilde{V}$ telle que le triplet $(F_1 A, g, F)$ soit une transformation naturelle du foncteur F vers le foncteur $F_1 A$.

Rappelons que cette dernière condition signifie que, pour tout $e \in C'_0$, $g(e)$ est une application linéaire continue de $F(e)$ dans $F_1 A(e)$ et que, pour tout $f \in C'$, on a, dans $\tilde{V}$:

$$g(e) = F_1 A(f) g(e') F(f), \quad \text{où } e = \alpha(f) \text{ et } e' = \beta(f).$$

Soit $H(A)$ la sous-classe de $\tilde{V}$ formée des éléments $g(e)$, où $e \in C'_0$ et (A, g) est un homomorphisme de (C, F) vers (C_1, F_1) . L'ensemble des éléments de $H(A)$ de source $F(e)$ et de but $F_1 A(e)$ s'identifie à un sous-espace vectoriel $T_A(e)$ de l'espace vectoriel $L(F(e), F_1 A(e))$ des applications linéaires continues de $F(e)$ dans $F_1 A(e)$. Un élément $g(e)$ de $T_A(e)$ peut être considéré comme une structure sur $F(e)$ ou une structure sur e . Pour tout $f \in C'$, soit $T_A(f)$ l'application linéaire de $T_A(e')$ dans $T_A(e)$ qui associe à $g(e')$ l'application: $g(e) = F_1 A(f) g(e') F(f)$, où

$$e = \alpha(f) \text{ et } e' = \beta(f).$$

Proposition 3-1: Avec les notations précédentes, $(H(A), T_A)$ est une espèce de structures inductives vectorielle au-dessus de la catégorie C^* duale de C . Si C est complètement régulière à droite (resp. à gauche) et C_1 complètement régulière à gauche (resp. à droite), alors $H(A)$ peut être élargie en une catégorie $\bar{H}(A)$ de classe $\tilde{V}$.

C^* est une catégorie inductive régulière pour la relation:

$$h^* < h'^* \text{ si et seulement si } h < h' \text{ dans } C,$$

où h^* et h'^* sont les éléments de C^* correspondants canoniquement à h et h' .

La catégorie $\bar{H}(A)$ est la sous-catégorie de $\tilde{V}$ dont les éléments sont ceux de $F(C')$, de $F_1A(C')$ et les structures de $H(A)$, l'élément $g(e)$ étant considéré comme un morphisme de $F(e)$ dans $F_1A(e)$. La loi d'induction sur $\bar{H}(A)$ est définie la façon suivante: $F(C')$ et $F_1A(C')$ sont munis des structures d'ordre induites par celles de $\tilde{C}$ et $\tilde{C}_1$ resp. (proposition 1-2); $H(A)$ est muni de la relation d'ordre:
 $g(e) < g'(e')$ si et seulement si $e < e'$ et $g(e) = F_1A(e'e)g'(e')F(e'e)$
 La catégorie $\bar{H}(A)$ est complètement régulière.

Si C est complètement régulière à gauche et C_1 , à droite, on se ramène au cas précédent par passage aux catégories duales. Nous omettrons désormais ce cas.

Proposition 3-2: Si pour tout $e \in C'_0$, $T_A(e)$ est muni de la topo-

logie de la convergence simple (resp. compacte, resp. bornée)
alorst($H(A), T_A$) est une $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives.

A chaque foncteur A , associons $H(A)$. Soit (e, e_1) un couple tel $e \in C'_0$, $e_1 \in C'_0$, et il existe A tel que $A(e) = e_1$. Soit $T(e, e_1)$ le sous-espace vectoriel (topologique) de $L(F(e), F_1(e_1))$ somme directe (localement convexe) des sous-espaces vectoriels (topologiques) $T_A(e)$ tels que $A(e) = e_1$. Soit H la classe dont les éléments sont les éléments des espaces $T(e, e_1)$. Pour tout couple (f, f_1) , où $f \in C'$, $f_1 \in C'_1$, $A(f) = f_1$, $\beta(f) = e$ et $\alpha(f_1) = e_1$, désignons par $T(f, f_1)$ l'application: $h \longrightarrow F_1(f_1) h F(f)$.

Proposition 3-3: Avec les notations précédentes, (H, T) est une espèce de structures inductives vectorielle (topologique) au-dessus de $C^* \times C_1$.

La relation d'ordre dans H est définie par:

$h + h_1 < h' + h'_1$ si et seulement si il existe A et A_1 tels que
 $h < h'$ dans $H(A)$ et $h_1 < h'_1$ dans $H(A_1)$.

Remarque: 3-1. Supposons C complètement régulière à droite et C_1 , à gauche. Si, pour tout couple (f, f') , où $f \in C'$, $f' \in C'$ et $\beta(f) = \beta(f')$ (resp. $\alpha(f) = \alpha(f')$), il existe $f'' \in C'$ tel que $f.f'' = f'$ ou $f'.f'' = f$ (resp. $f''.f = f'$ ou $f''.f' = f$) et si $F_1 A(f)$ est une injection pour tout $f \in C'$, alors $T_A(e)$ est l'espace vectoriel $L(F(e), F_1 A(e))$ pour tout $e \in C'_0$. Il en est de même dans le cas où C_1 n'a qu'un seul élément. Ces cas se présentent souvent dans les exemples.

2) Homomorphismes de $\tilde{V}$ -catégories inductives:

Soient (H, F) et (H_1, F_1) deux $\tilde{V}$ -catégories inductives sur $C' \subset C$ et sur $C'_1 \subset C$ resp., les foncteurs projections de H vers C et de H_1 vers C étant p et p_1 .

Soit k un foncteur de H vers H_1 vérifiant les conditions suivantes:

- 1) On a: $p_1 k = p$ et la restriction de k à H_0 définit H_0 comme espèce de superstructures au-dessus de l'espèce de structures $(H_1)_0$ au-dessus de C' .
- 2) k est compatible avec les structures d'ordre.
- 3) Pour tout $e \in (C'_1)_0$ la restriction de k à $F(e)$ est une application linéaire continue de $F(e)$ dans $F_1(e)$.

La condition 3 entraîne que C'_1 est une sous-catégorie inductive faible de C' .

Définition 3-2: Avec les notations précédentes, le foncteur k sera appelé homomorphisme de (H, F) vers (H_1, F_1) .

Cette définition se généralise facilement au cas où (H, F) et (H_1, F_1) ne sont pas au-dessus de la même catégorie C par l'introduction d'un foncteur A comme dans la définition 3-1.

Proposition 3-4: Si k est un homomorphisme de (H, F) vers (H_1, F_1) alors (id, k) est un homomorphisme de (C, F) vers (C_1, F_1) et $k(H)$ est une sous-catégorie vectorielle de H_1 .

La classe K de tous les homomorphismes d'une $\tilde{V}$ -catégorie

inductive au-dessus de C dans une autre est une sous-catégorie de la catégorie des foncteurs d'une catégorie dans une autre.

Soit I_0 un ensemble ordonné filtrant et I la catégorie que l'on obtient en adjoignant à I_0 les couples (j, i) , où $j < i$, la loi de composition étant:

$$(j', i') \cdot (j, i) = (j', i) \quad \text{si et seulement si} \quad i' = j \quad (\text{voir [9d]})$$

Soit T un foncteur de I dans K ; alors $T(i)$ est une $\tilde{V}$ -catégorie inductive (H_i, F_i) sur $C'_i \subset C$. Désignons par C'_i l'intersection de toutes les sous-catégories C'_j par $C'_i \subset C'_j$.

Pour tout $e \in C'_0$, soit $F(e)$ l'espace localement convexe limite projective des espaces localement convexes $F_i(e)$ relativement aux restrictions à e des foncteur $T(j, i)$. Pour tout $f \in C'$, soit $F(f)$ l'application de $F(e)$ dans $F(e')$, où $e = \alpha(f)$ et $e' = \beta(f)$, déduite des applications $F_i(f)$ par passage à la limite projective.

Soit H la catégorie limite projective des catégories H_i relativement aux foncteurs $T(j, i)$.

Théorème 3-1: Sous les hypothèses précédentes, (H, F) est une $\tilde{V}$ -catégorie inductive sur $C' \subset C$, la loi d'induction dans H étant définie par:

$$(h_i)_{i \in I} < (h'_i)_{i \in I} \quad \text{si et seulement si} \quad h_i < h'_i \quad \text{dans} \quad H_i.$$

Théorème 3-2: Soit C une catégorie complètement régulière à droite et k un homomorphisme d'une $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives (S, F) sur $C' \subset C$ vers une $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives (S_1, F_1) . A k correspond canoniquement un homomorphisme

$J(k)$ de $(J(S, C), J(F))$ vers $(J(S_1, C), J(F_1))$, un homomorphisme
 $T(k)$ de $(K, T(F))$ vers $(K_1, T(F_1))$ et un homomorphisme $\bar{k}$ de $(\bar{S}, \bar{F})$
vers $(\bar{S}_1, \bar{F}_1)$.

Les notations sont celles des théorèmes 1-6, 1-5 et 1-2.

3) Distructures de (C, F) vers (C_1, F_1) :

Soient C et C_1 deux catégories inductives de classe $\tilde{V}$ relativement aux foncteurs F et F_1 définis sur C' et C'_1 resp. Dans la suite de ce paragraphe, nous supposerons que C est complètement régulière à droite et C_1 , à gauche.

Soit A un foncteur contravariant de C' vers C'_1 compatible avec les inductions (comme dans la définition 3-1). Soit $D(A)$ la classe dont les éléments sont les applications linéaires continues de $F(e)$ dans $F_1 A(e)$, où $e \in C'_0$. La catégorie C^* opère sur $D(A)$ par la loi de composition:

$$(f^*, g) \longrightarrow F_1 A(f) \circ g \circ F(f), \quad \text{où } \beta(f) = e \text{ et } g \in L(F(e), F_1 A(e)).$$

Soit L le foncteur de C'^* vers $\tilde{V}$ qui associe à $e \in C'_0$ l'espace $L(F(e), F_1 A(e))$ et, à $f \in C'$, l'application: $g \longrightarrow f^* \cdot g$ de $L(e)$ dans $L(\alpha(f))$, où $f^* \cdot g$ désigne le composé de f^* et g .

Théorème 3-2: Avec les notations précédentes, $(D(A), L)$ est une
espèce de structures inductives vectorielle au-dessus de C^* .
Si de plus, pour tout $e \in C'_0$, $L(e)$ est muni de la topologie de
la convergence simple (resp. compacte, resp. bornée), alors
 $(D(A), L)$ est une $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives sur C'^* .

La loi d'induction dans $D(A)$ est définie par:

$(f^*, g) < (f'^*, g')$ si et seulement si $f < f'$ dans C et
 $g = g' \cdot (e'e)^* = F_1 A(e'e) \in F(e'e)$, où
 $e = \beta(f)$ et $\beta(f') = e'$.

$D(A)$ est étalée sur C'^* .

Remarquons que $D(A)$ est aussi la classe réunion des classes $H(A/C'')$, où C'' est une sous-catégorie inductive faible régulière de C' et où A/C'' désigne la restriction de A à C'' . Si (A, g) est un homomorphisme de (C, F) vers (C_1, F_1) , alors, si g/C'' est la restriction de g à C'' , $(A/C'', g/C'')$ est un homomorphisme de $(C, F/C'')$ vers (C_1, F_1) , où F/C'' est la restriction de F à C'' .

$D(A)$ peut aussi être élargie en une catégorie inductive complètement régulière à gauche au-dessus de C^* par un procédé analogue à celui utilisé dans la proposition 3-1.

$(D(A), L)$ admet $(H(A), T_A)$ comme sous-espèce de structures vectorielle (topologique). Ces deux espèces coïncident si, pour tout $e \in C'_0$, on a $L(e) = T_A(e)$, par exemple dans les cas indiqués dans la remarque 3-1.

Soit D la réunion des classes $D(A)$, où A est un foncteur contravariant d'une sous-catégorie inductive faible régulière de C' vers C_1 compatible avec les inductions.

Pour tout couple (e, e_1) , où $e \in C'_0$ et $e_1 \in (C'_1)_0$, soit $d(e, e_1)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de $F(e)$ dans $F_1(e_1)$. La classe D admet pour éléments les

éléments des espaces $d(e, e_1)$. La catégorie $C^* \times C_1$ opère sur D par la loi de composition:

$$((f^*, f_1), g) \longrightarrow F_1(f_1) \cdot g \cdot F(f) \quad \text{si et seulement si } g \in d(e, e_1),$$

$$\alpha(f^*) = e \quad \text{et} \quad \alpha(f_1) = e_1.$$

Théorème 3-3: Avec les notations précédentes, (D, d) est une espèce de structures inductives vectorielles au-dessus de $C^* \times C_1$. Si de plus, pour tout $(e, e_1) \in (C^* \times C_1)_0$ l'espace $d(e, e_1)$ est muni de la topologie de la convergence simple (resp. compacte, resp. bornée), alors (D, d) est une $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives au-dessus de $C^* \times C_1$.

Désignons encore par D la catégorie des hypermorphisms correspondant à l'espèce de structures D au-dessus de $C^* \times C_1$. Dans D la loi d'induction est:

$$((f^*, f_1), g) < ((f'^*, f'_1), g') \quad \text{si et seulement si } f < f', \quad f_1 < f'_1,$$

$$e = \beta(f), \quad e_1 = \alpha(f_1), \quad E = \beta(f'),$$

$$E_1 = \alpha(f'_1), \quad g' = ((Ee)^*, e_1 E_1) \cdot g.$$

L'application $d(f^*, f_1)$ est l'application:

$$g \longrightarrow (f^*, f_1) \cdot g = F_1(f_1) \cdot g \cdot F(f),$$

qui est continue pour les topologies indiquées. De plus D est étalée au-dessus de $C^* \times C_1$.

D peut encore être élargie en une catégorie de classe $\tilde{V}$ contenant $F(C')$ et $F_1(C'_1)$ comme sous-catégories inductives, une structure de D étant considérée comme un morphisme (voir proposition 3-1).

Définition 3-3: Avec les notations précédentes et si l'on suppose de plus que, pour tout $e_1 \in (C'_1)_0$, l'espace localement convexe $F_1(e_1)$ est complet, une structure de $D(A)$ sera appelée distructure sur C relativement à A et une structure de D , distructure de (C, F) vers (C_1, F_1) .

La condition de complétion topologique énoncée dans cette définition entraîne que les espaces $L(e)$ et $d(e, e_1)$ soient complets, pour tout $e \in C'$ et tout $e_1 \in (C'_1)_0$. Cette définition est un cas particulier d'une définition plus générale que nous donnerons plus loin (paragraphe 4).

Remarques: 3-2. Les espèces de structures $(D(A), L)$ et (D, d) dépendent explicitement de la donnée de F et F_1 . Toutefois, elles ne varient pas si les topologies des espaces $F(e)$ et $F_1(e_1)$ varient sans que les duaux topologiques changent.

3-3 Si C et C_1 sont des catégories de classe $\tilde{V}$, une distructure sur C relativement à A est une structure sur C compatible avec la structure inductive de C (puisque la loi d'induction sur $D(A)$ est définie à partir de celle de C) et avec la structure vectorielle (puisque c'est une application linéaire continue de l'espace localement convexe $E \in C'_0$ dans $A(E)$). On pourrait toujours se ramener au cas où C et C_1 sont de classe $\tilde{V}$; ce cependant la considération des foncteurs F et F_1 est en principe plus pratique dans les applications.

Théorème 3-4: Soient (S, F) et (S_1, F_1) deux $\tilde{V}$ -espèces de structures inductives sur $C' \subset C$ et sur $C'_1 \subset C_1$ resp. Supposons C'

normale à gauche et C'_1 normale à droite. Alors la $\tilde{V}$ -espèce des
distructures de $(T(C'), T(F))$ vers $(T(C'_1), T(F_1))$ s'identifie à
la $\tilde{V}$ -espèce $(K', T(d))$ correspondant à (D, d) . (théorème 1-2).

Ce théorème est vrai que l'on considère les espèces de distructures comme des espèces vectorielles ou comme des espèces vectorielles topologiques (à condition de prendre partout la même topologie de convergence simple, resp. compacte, resp. bornée).

Théorème 3-5: Soient (S, F) une $\tilde{V}$ -espèce de structures inducti-
ves covariante (resp. contravariante) sur $C' \subset C$ et (S_1, F_1) une
 $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives contravariante (resp. cova-
riante) sur $C'_1 \subset C_1$; alors (D, d) est une $\tilde{V}$ -espèce de structures
contravariante (resp. covariante) au-dessus de $C^* \times C_1$.

Théorème 3-6: Avec les hypothèses du théorème précédent et si
 C'' est une sous-catégorie inductive régulière de C , soient (S', F')
 (S', F') et (D', d') les $\tilde{V}$ -espèces de structures inductives as-
sociées à (S, F) et (D, d) par la théorème 1-7. Alors (D', d')
s'identifie à la $\tilde{V}$ -espèce des distructures de (C'', F') vers
 (S_1, F_1) .

Soit $F_1 = \text{id}$ et C_1 réduite au seul élément la droite numérique R ; alors $d(C^* \times R)$ est une catégorie de classe $\tilde{V}$ complètement régulière à gauche, dont les objets sont les duals topologiques des objets de $F(C')$ et les morphismes les applications transposées des applications $F(h)$, où $h \in C'$, la loi d'induction étant:

$L(F(e), R) < L(F(E), R)$ si et seulement si $e < E$,

$t_F(h) < t_F(h')$ si et seulement si $h < h'$.

Si les objets de $d(C')$ sont munis de la topologie faible (resp. forte) définie par la dualité, alors (D, d) sera appelée $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives duale faible (resp. forte) de C relativement à F . Si (S, F) est une $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives au-dessus de C , la $\tilde{V}$ -espèce duale faible (resp. forte) de C relativement à F sera aussi appelée duale faible (resp. forte) de (S, F) . Pour une étude générale des $\tilde{V}$ -espèces de structures inductives duales, nous renvoyons à [3].

Soient (S, F) et (S_1, F_1) deux $\tilde{V}$ -espèces de structures inductives sur $C' \subset C$ et $C'_1 \subset C_1$ resp. Supposons que, pour tout $e_1 \in (C'_1)_0$, l'espace $F_1(e_1)$ soit complet et que, pour tout couple (e, E) , où $e \in C'_0$, $E \in C'_0$ et $e < E$, on ait:

$$F(Ee)(F(e)) = F(E).$$

Pour tout $e \in C'_0$, désignons par $J(F)(e)$ l'espace limite inductive des espaces localement convexes $J(F)(E)$, où $E \in C'_0$ et $e < E$. Soit $J(S)$ l'espèce de structures inductives formée des jets de S au-dessus de C . Alors $(J(S), J(F))$ est une $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives au-dessus de C . Soit $(J(S_1, C_1), J(F_1))$ la $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives construite au théorème 1-6 et soit $(J(D, C^* \times C_1), J(d))$ celle associée par le même théorème à (D, d) .

Théorème 3-7: Avec les notations précédentes, $(J(D, C^* \times C_1), J(d))$ est équivalente à la $\tilde{V}$ -espèce des distructures de $(J(S), J(F))$ vers $(J(S_1, C_1), J(F_1))$, les mêmes topologies de convergence étant considérées sur les espèces de distructures.

En particulier si les objets de C' et de C'_1 sont des ensembles et si C et C_1 contiennent les ensembles réduits à un seul élément, la sous-espèce de structures vectorielle de $(J(D, C \times C_1), J(d))$ formée des jets atomiques est l'espèce des distructures correspondant aux jets atomiques de S et S_1 au-dessus de C et C_1 .

Remarques: 3-4. Les résultats énoncés dans ce paragraphe se transposent au cas où les $\tilde{V}$ -espèces de structures inductives sont remplacées par des $\tilde{V}$ -catégories inductives. Nous nous sommes limités à des cas particuliers afin de simplifier le texte.

3-5. Une distructure est un ouvert connexe pour la métatopologie canonique sur l'espèce inductive des jets locaux atomiques de distructures, dans le cas où C et C_1 contiennent des atomes. (Voir [9c]). Dans ce cas, on pourrait appeler plus généralement distructure tout ouvert connexe pour cette métatopologie; on obtiendrait ainsi une généralisation des distructures analogue à celle qui permet de passer des fonctions aux fonctions multiformes.

3-6. Une étude analogue à celle faite dans ce paragraphe peut être faite en remplaçant les applications linéaires continues de $F(e)$ dans $F_1(e_1)$ par les applications r fois différentiables sur $F(e)$, à valeurs dans $F_1(e_1)$. Pour cette question, nous renvoyons à [3].

3-7. Les hypothèses de complète régularité utilisées tout au long de ce paragraphe peuvent être remplacées par des hypothèses moins fortes, mais les résultats sont alors plus compliqués.

4- DISTRICTURES

1) Problèmes de complétion de $\tilde{V}$ -catégories inductives:

Les $\tilde{V}$ -catégories inductives les plus intéressantes sont celles qui sont complètes selon la définition suivante:

Définition 4-1: Soit (H, F) une $\tilde{V}$ -catégorie inductive (resp. une $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives) sur $C' \subset C$. On dit que (H, F) est complète si les conditions suivantes sont vérifiées:

- 1) Pour tout $e \in C'_0$, l'espace localement convexe $F(e)$ est complet.
- 2) La catégorie inductive H est complète relativement à C .

Un élément d'une $\tilde{V}$ -catégorie inductive complète (resp. d'une $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives complète) est appelé une dist-structure.

Une $\tilde{V}$ -catégorie (resp. $\tilde{V}$ -espèce de structures) inductive complète sera aussi appelée catégorie (resp. espèce) de dist-structures.

Le problème que nous considérerons dans ce paragraphe est celui de compléter une $\tilde{V}$ -catégorie inductive; plus précisément nous étudierons les 3 cas suivants:

Problème I: Soit (H, F) une $\tilde{V}$ -catégorie inductive. Construire une $\tilde{V}$ -catégorie inductive complète dont (H, F) soit une sous-catégorie vectorielle et qui soit une sous-catégorie vectorielle de toute $\tilde{V}$ -catégorie inductive complète contenant (H, F) comme sous-catégorie vectorielle (c'est-à-dire que c'est la

plus petite possible).

Le problème de la complétion d'Aronszajn (exemple 2-4) rentre dans ce cas.

Problème II: Soient (H, F) et (H', F') deux $\tilde{V}$ -catégories inductives sur $C' \subset C$. Construire une $\tilde{V}$ -catégorie inductive complète (H'', F'') telle que, pour tout $e \in C'_0$, $F''(e)$ soit un sous-espace de l'espace des applications linéaires continues de $F(e)$ dans $F'(e)$.

Problème III: Soit (H, F) une $\tilde{V}$ -catégorie inductive et $(G, \bar{q}^1)$ une catégorie de catégories d'opérateurs sur (H, F) . Construire une $\tilde{V}$ -catégorie inductive complète (H'', F'') , la plus petite possible, sur laquelle opère $(G, \bar{q}^1)$, et dont (H, F) est une sous-catégorie vectorielle.

Nous verrons que les distributions au sens de L. Schwartz [16] peuvent être obtenues comme solution de chacun de ces problèmes.

2) Problème I:

Théorème 4-1: Soit C une catégorie complètement régulière à gauche. Soit (S, F) une $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives sur $C' \subset C$. Il existe une plus petite espèce de distructures (S'', F'') dont (S, F) soit une sous-espèce vectorielle.

Construction de (S'', F'') : Pour tout $e \in C'_0$, soit $F'(e)$ l'espace localement convexe complet associé à $F(e)$. Un élément s' de $F(e)$ sera identifié à un filtre de Cauchy maximal (pour l'ordre dans la catégorie inductive des filtres [9c]), à savoir

le filtre intersection de tous les filtres de Cauchy équivalents à s pour la relation:

$X \sim X'$ si et seulement si X et X' ont en commun un ensemble petit d'ordre V , pour tout entourage V de l'espace uniforme $F(e)$.

Pour tout $f \in C'$, l'application $F(f)$ se prolonge en une application linéaire continue $F'(f)$ de $F'(\alpha(f))$ dans $F'(\beta(f))$.

La relation d'ordre sur C'_0 est définie par:

$s' < s''$ si et seulement si s' est contenu dans le filtre $F'(e'e'')(s'')$, où $s' \in F'(e)$, $s'' \in F'(e'')$ et $e'' < e'$.

La $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives (S'', F'') est obtenue à partir de (S', F') par la construction du théorème 1-5.

Remarque 4-1. Ce théorème est vrai plus généralement : Si (H, F) est une $\tilde{V}$ -catégorie inductive sur $C' \subset C$, on peut la plonger dans une plus petite $\tilde{V}$ -catégorie inductive complète (H'', F'') dont (H, F) soit une sous-catégorie vectorielle. Pour la définition exacte de (H'', F'') qui est assez compliquée, nous renvoyons à [3].

Théorème 4-2: Soit (S, F) une $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives sur $C' \subset C$, où C' est une sous-catégorie pleine de la catégorie complètement régulière à gauche C . Alors il existe une plus petite espèce de structures dont $(\tilde{S}, \tilde{F})$ soit une sous-espèce vectorielle, où $\tilde{S}$ est l'élargissement complet de S à C .

Construction: On montre d'abord que l'élargissement algébrique (voir [9d]) $\tilde{S}'$ de S à C est une $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives sur la sous-catégorie faible inductive C'' engendrée

par C' et les éléments inversibles de C appartenant au groupe distingué G de C dont l'une des unités appartient à C' . Dans $\tilde{F}'(e')$, où $e' \in C'_0$, la structure localement convexe est celle déduite de celle de $F(e)$ par l'isomorphisme: $s \rightarrow \beta(f, s)$, où $f \in G$, $\beta(f) = e'$ et $\alpha(f) = e \in C'_0$. La $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives $(\tilde{S}', \tilde{F}')$ ainsi obtenue est complétée (algébriquement et topologiquement) à l'aide du théorème 4-1. Une distructure ainsi obtenue peut être identifiée à un atlas complet [9d].

3) Problème II:

Le théorème suivant justifie la terminologie utilisée au paragraphe 3.

Théorème 4-3: Soient (S, F) et (S_1, F_1) deux $\tilde{V}$ -espèces de structures inductives sur $C' \subset C$ et $C'_1 \subset C_1$ resp., où C et C_1 sont complètement régulières à droite et à gauche resp. Si (D, d) et $(D(A), L)$ sont les $\tilde{V}$ -espèces de structures inductives du paragraphe 3, il existe des plus petites espèces de distructures dont elles sont des sous-espèces vectorielles.

Construction: Soit (S''_1, F''_1) l'espèce de distructures obtenue par complétion de (S_1, F_1) ; les espèces de distructures cherchées sont obtenues par complétion (à l'aide du théorème 4-1) des $\tilde{V}$ -espèces des distructures de (C, F) vers (C_1, F''_1) et des distructures sur C relativement à A et F''_1 resp. (lesquelles ont été considérées au paragraphe 3).

Corollaire: (D, d) peut être élargie et complétée en une espèce de distructures au-dessus de $C^* \times C_1$ par le procédé du théorème 4-2.

Remarque: 4-2. Les théorèmes 4-2 et 4-3 sont encore vrais dans le cas général où (S, F) et (S_1, F_1) sont remplacées par des $\tilde{V}$ -catégories inductives. Mais les démonstrations exigent l'emploi de résultats généraux sur les atlas complets que nous n'avons pas introduits ici pour ne pas alourdir le texte.

4) Problème III:

Théorème 4-4: Soit (S, F) une $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives sur $C' \subset C$, où C est complètement régulière à gauche. Soit $(G, \bar{q}^1)$ une catégorie de catégories d'opérateurs sur (S, F) . Alors il existe une plus petite espèce de distructures $(\bar{S}, \bar{F})$ au-dessus de C dont (S, F) est une sous-espèce vectorielle et sur laquelle $(G, \bar{q}^1)$ est une catégorie de catégories d'opérateurs.

Construction:

- a) On construit la $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives (S', F') telle que $F'(e)$ soit le complété de $F(e)$ comme au théorème 4-1.
- b) Par le procédé d'élargissement algébrique, on élargit $F'(e)$ à $\bar{q}^1(e)$: c'est-à-dire que les éléments de $F''(e)$ sont les filtres images par les opérateurs de $\bar{q}^1(e)$ des filtres de Cauchy maximaux éléments de $F'(e)$. Cette construction est possible puisque tout opérateur u de $\bar{q}^1(e)$ s'étend en un opérateur sur l'ensemble des parties de $F(e)$ en posant:
 $u(A) =$ ensemble des éléments $u(a)$, où $a \in A$ et A est une partie de $F(e)$. De plus, on munit $F''(e)$ de la topologie pour laquelle les opérateurs u deviennent continus. On obtient ainsi une $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives (S'', F'') sur $C' \subset C$.

c) On complète à l'aide du théorème 4-1 la $\tilde{V}$ -espèce (S'', F'') et on obtient ainsi la $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives $(\bar{S}, \bar{F})$.

Définition 4-1: Avec les notations du théorème 4-1 (resp. 4-4) l'espèce de distructures (S'', F'') (resp. $(\bar{S}, \bar{F})$) sera appelée dicomplétion de (S, F) (resp. de (S, F) relative à $(G, \bar{q}^1)$).

Remarque: 4-3. Le théorème 4-4 est encore vrai sous des conditions plus générales:

Théorème 4-4': Si (H, F) est une $\tilde{V}$ -catégorie inductive sur $C' \subset C$, dont $(G, \bar{q}^1)$ est une catégorie de catégories d'opérateurs, alors (H, F) admet une dicomplétion relative à $(G, \bar{q}^1)$.

Soient (S, F) et (S_1, F_1) deux $\tilde{V}$ -espèces de structures inductives sur $C' \subset C$ et $C'_1 \subset C_1$, où C_1 est complètement régulière à gauche et C , à droite. Soient $(G, \bar{q}^1)$ et $(G_1, \bar{q}_1^1)$ des catégories de catégories d'opérateurs sur (S, F) et (S_1, F_1) resp. Soit (D, d) la $\tilde{V}$ -espèce des distructures de (C, F) vers (C_1, F_1) (voir paragraphe 3). Alors $(G, \bar{q}^1)$ et $(G_1, \bar{q}_1^1)$ sont des catégories de catégories d'opérateurs resp. à droite et à gauche sur (D, d) . Il en résulte que la catégorie de catégories:

$$(G^* \times G_1, (q \times q_1)^{-1})$$

opère sur (D, d) par la loi de composition:

$$((u^*, u_1), g) \longrightarrow u_1 g u \text{ si et seulement si } g \in d(e, e_1),$$

$$q(u) = e \text{ et } q_1(u_1) = e_1.$$

Théorème 4-5: Avec les notations précédentes, la dicomplétion de (D, d) relative à $(G^* \times G_1, (q \times q_1)^{-1})$ s'identifie à une sous-

espèce vectorielle de la $\tilde{V}$ -espèce des distructures de $(C, \overline{F})$ vers $(C_1, \overline{F}_1)$.

5- APPLICATIONS ET CONCLUSION.

Beaucoup de notions introduites en Analyse fonctionnelle rentrent dans le cadre des distructures. En particulier, les théorèmes de dicomplétion du paragraphe 4 mènent à la complétion fonctionnelle au sens d'Aronszajn (exemple 2-5), à la notion d'opérateurs au sens de Mikusinsky [13] à l'aide du théorème 4-2 (par un élargissement algébrique seulement), à celle de diviseur [7] (à l'aide du théorème 4-2), à celle de distribution au sens de Cartier [6], à celle de distributions au sens de L. Schwartz [16], de courants de de Rham [14], de distributions tenseurs.

Les trois dernières notions citées ainsi que leur généralisation aux E-variétés indéfiniment différentiables (chapitre III) sont des cas particuliers de la notion suivante:

Soit M un espace fibré indéfiniment différentiable. Soit (S, F) la $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives sur C construite à l'exemple 2-4 à partir des sections indéfiniment différentiables de M au-dessus des éléments de C_0 ; soit $(G, \bar{q}^1)$ la catégorie de catégories d'opérateurs considérée dans ce même exemple.

Définition 5-1: On appelle C_0 -distructure section de M un élément de la dicomplétion de l'espèce (S, F) relative à $(G, \bar{q}^1)$.

Cette définition étant essentiellement de caractère local, on peut définir les notions de produit par une section, produit tensoriel, ... Ces questions sont développées dans [3].

En particulier, si M est l'espace fibré trivial $B \times R$, les C_0 -distributions sections sont analogues aux distributions sur une variété de dimension finie, et seront appelées C_0 -distributions sur M . Si M est l'espace fibré des tenseurs d'ordre r (voir chapitre III), on obtient des C_0 -distributions tenseurs d'ordre r . On obtient de même des C_0 -courants sur B en partant des formes extérieures.

Plus généralement on peut partir de deux espaces fibrés indéfiniment différentiables M et M' de même base B et définir des C_0 -distributions sur B à partir de la $\tilde{V}$ -espèce de structures inductives dont les éléments sont les homomorphismes indéfiniment différentiables d'espaces fibrés qui appliquent fibre sur fibre.

Pour retrouver ainsi les distributions sur R^n , on prend pour C_0 la classe des ouverts relativement compact de R^n . Une distribution sur un tel ouvert sera donc définie comme l'image par un opérateur de dérivation d'un filtre de Cauchy maximal et une distribution sur R^n comme une classe complète de telles distributions. Le caractère fonctionnel des distributions est retrouvé en remarquant que l'espace $F'(e)$ (construction du théorème 4-4) complété de $F(e)$ s'identifie à un sous-espace vectoriel du dual topologique de $F(e)$. La topologie habituellement

considérée sur l'espace des distributions [16] est celle que les opérateurs de dérivation servent à définir (construction du théorème 4-4).

On retrouve par le procédé de d'acomplétion les distributions tempérées sur R^n en partant de l'espèce de structures définie dans l'exemple 2-1 et de la catégorie de catégories d'opérateurs de dérivation définie d'une manière analogue à celle employée dans le cas des C_0 -distributions.

A partir de ces définitions locales, on peut facilement étudier les points singuliers d'une distribution, plus particulièrement développer la question des pseudo-fonctions et parties finies d'Hadamard [11]. On est également amené à l'étude de transformations intégrales, généralisant les transformations de Fourier et Laplace, ce qui s'applique par exemple dans la théorie des équations aux dérivées partielles et des systèmes différentiels. Ces questions débordant le cadre de ce travail, leur étude sera exposée dans [3]. Certains résultats sur les distributions ont été appliqués à la résolution du problème de Burmister en élasticité [3c].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARONSZAJN- SMITH- Functionals spaces and functional completion- Ann. Inst. Fourier, t. VI, 1955-56, p.125.
- [2] M. BALANZAT- La différentielle d'Hadamard-Fréchet dans les espaces vectoriels topologiques- C.R.A.S. t. 251, 1960, page 2459.
- [3] A. BASTIANI- a) Polyèdres convexes dans les espaces vectoriels topologiques- Séminaire Topologie et Géom. Dif. 1957-58, p. 19-01. b) Distructures, applications aux équations aux dérivées partielles- A paraître. c) Méthode pratique de résolution du problème de Cauchy mixte- C.R.A.S. t. 250, 1960, p. 260. The explicit solution of the equations of the elastic deformations for a stratified body under given stresses in the dynamic case- A paraître.
- [4] G. BOULIGAND- Introduction à la géométrie infinitésimale directe- Paris 1932.
- [5] N. BOURBAKI- a)Espaces vectoriels topologiques- Chapitre I et II, ASI 1198. b)Espaces vectoriels topologiques- chapitres III, IV, V, ASI 1229. c)Intégration- Chapitres I, II, III, IV, ASI 1175. d)Topologie générale- Chapitre IX, ASI 1045- Hermann.
- [6] P. CARTIER- Hyperalgèbres et groupes de Lie formels- Séminaire "Sophus Lie", t. 2, 1955-56.
- [7] P. DOLBEAULT- Une généralisation de la notion de diviseur- Atti del Conv. Inter. di Geom. Alg. Turin, 1961, p. 125.
- [8] J. EELLS Jr.- On the geometry of function spaces- Symposium Interna. Topologia Algebrica, 1958, p. 303.
- [9] C. EHRESMANN- a)Géométrie Différentielle- C.R.A.S. t. 233 1951, p. 598, 777, 1081; t. 234, 1952, p. 587, 1028, 1424; t. 239, 1954, p.1762. b)Catégories topologiques et catégories différentiables- Coll. Géom. Dif. 1958, Bruxelles, p. 137. c)Catégories inductives et pseudogroupes- Inst. Fourier, t.X, 1960. d)Espèces de structures locales, élargissements de catégories- Séminaire Ehresmann, 1961.
- [10] R. GODEMENT- Topologie algébrique et théorie des faisceaux- ASI 1252- Hermann.
- [11] A. GROTHENDIECK- Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires- Thèse- Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires- Ann. Inst. Fourier, t. IV, 1952, p.73.

- [11] J. HADAMARD- Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques- Hermann 1932.
- [12] E. HILLE- Functional analysis and semi-groups- New-York, 1, 1948.
- [13] J. G. MIKUSINSKI- Théorie des opérateurs-
- [14] G. de RHAM- Variétés différentiables- ASI 1222, Hermann.
- [15] P. L. ROSENBLOOM- The method of steepest descent- Proc. of the 6th Symp. in Applied Math. of the Amer. Math. Soc. Volume VI, Numerical Analysis.
- [16] L. SCHWARTZ- Théorie des distributions, tomes 1 et 2- ASI 1245 et ASI 1122, Hermann. Théorie des distributions à valeurs vectorielles- Ann. Inst. Fourier, t. VII, 1957, p. 1 et t. VIII, 1958, p. 1.

TABLE DES MATIERES

PREMIERE PARTIE- Différentiabilité dans les espaces localement convexes.

Pages

Chapitre I. Applications différentiables.

1- Généralités	1
2- Applications lipschitziennes et tangentes à 0	6
3- Applications différentiables en un point	17
4- Applications différentiables sur un ouvert	24

Chapitre II. Espaces d'applications n fois différentiables.

5- Différentielles d'ordre supérieur	36
6- Topologies sur l'espace des applications différentiables	53
7- Espace des applications indéfiniment différentiables	64
8- Applications différentiables d'ordre transfini	68

Chapitre III. Variétés de dimension infinie.

9- E-variétés différentiables	73
10- Prolongements d'une E-variété différentiable	78
11- Espaces d'applications différentiables sur une E-variété	82

DEUXIEME PARTIE- Distructures.

1- Catégories inductives vectorielles topologiques	II-1
2- Exemples et construction de V-catégories inductives	II-21
3- Homomorphismes	II-31
4- Distructures	II-43
5- Applications et conclusion	II-49

BIBLIOGRAPHIE-

DEUXIEME THESE

PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE

"EQUATIONS DE L'ELASTICITE DANS UN DEMI-ESPACE STRATIFIE"

Vu et approuvé :

Paris, le 10 Juin 1962

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Marc ZAMANSKY

VU

et Permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie
de Paris,

Jean ROCHE

